المحاضرة الأولى

الاثنين ١٤/ محرم/ ١٤٣٩ هـ

٢/ تشرين ١/ ٢٠١٧ م

ما يتضمنه مقرر نظرية الجبور

* القسم الأول 65% جبور لي بحدود 13 محاضرة
* تعرف مفهوم جبور لي انطلاقاً من مفهوم المقاسات.
* من امثلة جبور لي - جبور لي القابلة للحل
  - جبور لي عديمة القوى
  - جبور لي نصف البسيطة.
* صيغة كيلنك Killing
* معيار كارتان الاول والثاني (بدون برهان)
* تمارين متنوعة واضافات

* القسم الثاني 35% جبور Bck بحدود 6 محاضرات
* تعرف مفهوم جبور Bck وامثلة على ذلك.
* جبور Bck التبادلية والضمنية.
* جبور Bck المحدودة.
* الصفوف الاولية لجبور Bck المحدودة والضمنية.
* جبور Bck الضمنية مع جبر بول. واضافات

تمهيد في نظرية المودولات.

المودول (المقياس) R حلقة واحدية نعرف R مقاساً او مقاساً على R بانه M زمرة ابدالية (جمعية) مزودة بقانون تشكيل خارجي

من اليسار مجموعة مؤثراته R

$: R \times M \longrightarrow M \qquad (\lambda, m) \longrightarrow \lambda m$

Galaxy

ويتحقق منه

* $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
* $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$
* $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
* $1_R\, x = x$ $\quad \forall \lambda,\mu \in R \quad x,y \in M$

في الحالة التي يكون فيها F حقلاً فإن F مقاس يدعى
"فضاءً" شعاعياً على F

المقاس الجزئي : ان المجموعة الجزئية N من M مقاساً على R
تكون مقاساً جزئياً من M اذا تحقق

$x - y \in N$ $\qquad \lambda x \in N$

ويمكننا اختزال الشرطين السابقين $\lambda x - \mu y \in N$

مبرهنة تقبل بدون برهان
لأن تقاطع اي اسرة (جماعة) من الموديولات الجزئية في R - مقاساً M
هو مقاساً جزئياً من M .

التشاكلات M , N مقاييس على الحلقة الواحدية R يقال عن التطبيق
$f : M \longrightarrow N$ انه تشاكل مقاسي اذا حقق

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(\lambda x) = \lambda f(x)$

انتهت المحاضرة الاولى

لم أرَ عدلاً كالعدل للزمان إذا دار .

Galaxy

المحاضرة الثانية

الخميس ١٥ محرم ١٤٣٩هـ
٥ تشرين (١) ١٧٢٠م

جبر لي هو مقاس A على حلقة واحدية تبديلية $\mathbb{R}$ ومزود بقانون تشكيل داخلي له الشكل.

$$[\,,\,] : A \times A \longrightarrow A$$

حيث تتحقق الموضوعات الخمسة التالية

* $[x , x] = 0_A$
* $[x+y , z] = [x , z] + [y , z]$
* $[\alpha x , y] = [x , \alpha y] = \alpha [x , y]$
* $[x , y+z] = [x , y] + [x , z]$
* $[x , [y , z]] + [y , [z , x]] + [z , [x , y]] = 0_A$ متطابقة جاكوبي

$\forall\, x , y , z \in A \qquad \alpha \in \mathbb{R}$.

ملاحظة: يمكن صياغة تعريف جبر لي بأنه مقاسة معرف على حلقة واحدية تبديلية ومزود بتطبيق خطاني (ثنائي الخطية) بحيث تحقق الموضوعتين الأولى والخامسة

تذكرة

التطبيق الخطاني هو التطبيق الخطي بالنسبة للمركبة الأولى وتطبيق خطي بالنسبة للمركبة الثانية

أي بالشكل: $f : E \times E \longrightarrow E$

$$(x , y) \longrightarrow f(x , y)$$

- $f(\alpha x , y) = \alpha f(x , y)$
- $f(x + x' , y) = f(x , y) + f(x' , y)$
- $f(x , \alpha y) = \alpha f(x , y)$

$$f(x, y+y') = f(x,y) + f(x,y')$$

جبر لي التبادلي هو جبر لي الذي يتمتع بالخاصية

$$[A,A] = \{0\}$$

$$[x,y] = 0 \qquad \forall x,y \in A.$$

ان جبر لي يعود للعالم النرويجي ماريوس سوفوس لي

من جهة أخرى اذا كان يحقق

$$[x,y] = -[y,x]$$

$$; \quad 0 = [x+y, x+y] = \underbrace{[x,x]}_{=0} + [x,y] + \underbrace{[y,y]}_{=0} + [y,x]$$

$$\Rightarrow \quad 0 = [x,y] + [y,x]$$

هناك امثلة متعددة عن جبور لي في الكتاب يمكن العودة له للتفاصيل.

التشاكل بين جبري لي

ليكن A, A' جبري لي على حلقة واحدة تبديلية A

يكون التطبيق $f: A \longrightarrow A'$ تشاكلاً اذا حقق

* $f(x,y) = f(x) + f(y)$
* $f(\alpha x) = \alpha f(x)$
* $f[x,y]_A = [f(x), f(y)]_{A'} \qquad \forall x,y \in A \quad \alpha \in \mathbb{R}$

تعبير آخر هو تطبيق خطي يحقق الخاصية الثالثة.

جبور لي الخاصة

لتكن مجموعة المصفوفات المربعة $M_n(\mathbb{C})$ من المرتبة n على حقل الاعداد العقدية $\mathbb{C}$ حيث نعلم سابقاً انه مقاساً على K نزودها بقانون تشكيل داخلي آخر معرف بالشكل

/ /

$$[\,,\,] : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$
$$(m, m') \longrightarrow [m, m'] = mm' - m'm$$

نتأكد من الشروط الخمسة لجبر لي

① $[m, m] = mm - mm = 0$

② $[m+m', m''] = (m+m')m'' - m''(m+m')$
$= mm'' + m'm'' - m''m + m''m'$
$= [m, m''] + [m', m'']$

③ $[\alpha m, m'] = (\alpha m)m' - m'(\alpha m)$
$= \alpha(mm') - \alpha(m'm)$
$= \alpha(mm' - m'm)$
$= \alpha[m, m']$

④ متطابقة جاكوبي

$$[m, [m', m'']] + [m', [m'', m]] + [m'', [m, m']] = 0$$

نوجد كل حد على حدى

$[m, [m', m'']] = m[m', m''] - [m', m'']m$
$= m(m'm'' - m''m') - (m'm'' - m''m')m$
$= mm'm'' - mm''m' - mm'm'' - mm''m'$

كل حد يحذف مع نظيره ويبقى الصفر.

ومنه نجد أن مجموعة المصفوفات تحقق جبر لي وهناك جبور لي أكثر أهمية سنتطرق لها فيما بعد

تطبيقات الاشتقاق على جبر لي سيتم في الفيزياء النووية.

ليكن A جبر لي على حلقة تبديلية $\mathbb{R}$

إن تطبيق الاشتقاق على A هو تشاكل (تشاكل منطلقه ومستقره ذاته)

على الحقل A ويحقق العلاقة $d[x,y] = [dx,y] + [x,dy]$
نرمز لمجموعة تطبيقات الاشتقاق $Der(A)$ Derivation
وسنبين في المحاضرة القادمة ان هذه المجموعة تشكل جبر لي

يكون d تطبيق اشتقاق (تبادلي) على A اذا حقق $d: A \longrightarrow A$

$$d(x,y) = d(x) + d(y)$$

$$d(\alpha x) = \alpha d(x)$$

$$d([x,y]) = [dx,y] + [x,dy]$$

ولا يوجد علاقة بين تطبيق الاشتقاق والتبادل على جبر لي

وظيفة:

اثبت ان المجموعة $Der(A)$ جبر لي

$$+: Der(A) \times Der(A) \longrightarrow Der(A)$$

تطبيق الاشتقاق هو جبر لي

حيث A يمثل جبر لي

$$+: A \times A \longrightarrow A$$

انتهت المحاضرة الثانية

يوماً ما سأقول ...
لم يكن الامر سهلاً لكنه مغلق

المحاضرة الثالثة : الاثنين ١٩ محرم ١٤٣٩ هـ

٩ تشرين (١) ٢٠١٧ م

في الحقيقة ان $Der(A)$ هو مقاس على الحلقة الواحدية التبديلية R.

نعرف $\dot{+} : Der(A) \times Der(A) \to Der(A)$

$$(d_1, d_2) \longrightarrow d_1 \dot{+} d_2$$

لنبرهن ان $(\dot{+})$ معرف جيداً اي $d_1 \dot{+} d_2 \in Der(A)$

$$d_1 + d_2 : A \longrightarrow A$$

$$x \longrightarrow (d_1+d_2)(x) = d_1(x) + d_2(x)$$

ان مجموع تداكلين على مقاس A هو تداكل على مقاس A حيث $d_1, d_2 \in Der(A)$ وكل منهما هو تطبيق اشتقاق اي انه تداكل

ليتم المطلوب علينا ان نبرهن

$$(d_1+d_2)[x,y] = [(d_1+d_2)x, y] + [x, (d_1+d_2)y]$$

$$L_1 = (d_1+d_2)[x,y] =$$

$$= d_1[x,y] + d_2[x,y]$$

تطبيق اشتقاق

$$= [d_1x, y] + [x, d_1y] + [d_2x, y] + [x, d_2y]$$

تطبيق اشتقاق

$$= [(d_1+d_2)x, y] + [x, (d_1+d_2)y] = L_2$$

$$\Rightarrow d_1 + d_2 \in Der(A).$$

يمكن للطالب أن يبرهن ان $(Der, \dot{+})$ زمرة تبديلية

- حيادي
- نظير
- تجميعية
- تبديلية

ولنبرهن $d_1 \dot{+} d_2 = d_2 \dot{+} d_1$

$$l_1 = (d_1 \dot{+} d_2)(x) = d_1(x) + d_2(x)$$

بما ان A مقاس فإن $(A, +)$ زمرة تبديلية

$$= d_2(x) + d_1(x)$$

$$=(d_2 + d_1)(x)$$

لنزود هذه المجموعة بقانون تشكيل خارجي

حيث مجموعة مؤثراته $\mathbb{R}$

$$*: Der(A) \times \mathbb{R} \longrightarrow Der(A)$$

$$(\lambda, d_1) \longrightarrow \lambda * d$$

$$\lambda * d : A \longrightarrow A$$

$$x \longrightarrow \lambda * d(x) = \lambda \, d(x)$$

ولنبين ان التطبيق معرف جيداً أي $\lambda * d \in Der(A)$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad d \in Der(A)$$

إن $\lambda * d$ تشاكل على المقاس A حيث ضرب عدد سلمياً مع تشاكل هو تشاكل

$$(\lambda * d)[x,y] = \lambda \, d[x,y]$$

$$= \lambda([dx,y] + [x,dy])$$

$$= \lambda[dx,y] + \lambda[x,dy]$$ حسب جبر لي

حيث جميع العناصر $\{\lambda, dx, dy, x, y\}$ من A .

$$= [\lambda dx, y] + [x, \lambda dy]$$

عند خو ثنائي الخطية .

$$= [(\lambda * d)x, y] + [x, (\lambda * d)y]$$

مع العودة الى الشروط السابقة نجدها محققة

مما يوضح ان $Der(A)$ يمثل مقاساً على A

1- نظرية: إن الفضاء $Der(A)$ المؤلف من مجموعة تطبيقات الاشتقاق على A جبر لي.

لنزود الفضاء بقانون تشكيل داخلي نرمزله $[,]^{\circ}$ كما يلي

$$[,]^{\circ}: Der(A) \times Der(A) \longrightarrow Der(A)$$
$$(d_1, d_2) \longrightarrow [d_1, d_2]^{\circ} = d_1 o d_2 - d_2 o d_1$$

إن $[,]^{\circ}$ تطبيق معرف جيداً

في الواقع إن تركيب تطبيقين على A هو تطبيق على A وجمع تطبيقين على جبر لي A هو تطبيق على A

لنبرهن ان $[d_1, d_2]^{\circ}$ هو تطبيق اشتقاق على A أي لنبرهن

$$[d_1, d_2]^{\circ}[x, y] = [[d_1, d_2]x, y] + [x, [d_1, d_2]y]$$

$$l_1 = [d_1, d_2]^{\circ}[x, y] = d_1 o d_2[x, y] - d_2 o d_1[x, y]$$
$$= d_1(d_2[x, y]) - d_2(d_1[x, y])$$

$$= d_1([d_2 x, y] + [x, d_2 y]) - d_2([d_1 x, y] + [x, d_1 y])$$

$$= [d_1 d_2 x, y] + [d_2 x, d_1 y] + [d_1 x, d_2 y] + [x, d_1 d_2 y] - ([d_2 d_1 x, y] + [d_1 x, d_2 y] + [d_2 x, d_1 y] + [x, d_2 d_1 y])$$

$$= [(d_1 o d_2)(x), y] + [x, (d_1 o d_2)(y)] - [(d_2 o d_1)x, y] - [x, (d_2 o d_1)(y)]$$

$$= ([(d_1 o d_2)(x), y] - [(d_2 o d_1)(x), y]) + ([x, (d_1 o d_2)(y)] - [x, (d_2 o d_1)(y)])$$

Galaxy

/ /

$$= \left(\left[\left((d_1 \circ d_2) - (d_2 \circ d_1)\right) x, y\right]\right) + \left(\left[x, \left((d_1 \circ d_2) - (d_2 \circ d_1)\right) y\right]\right)$$

$$= \left[[d_1, d_2]\, x, y\right] + \left[x, [d_1, d_2]\, y\right]$$

$\Rightarrow$ تم المطلوب

يتضح من ذلك إن $[d_1, d_2] \in Der(A)$

ولنتأكد من صحة الشروط الخمسة

① $[d, d] = d \circ d - d \circ d = 0$

② $[d_1 + d_2, d_3](x) = ((d_1 + d_2) \circ d_3)(x) - (d_3 \circ (d_1 + d_2))(x)$

$$= \left((d_1 \circ d_3)(x) + (d_2 \circ d_3)(x)\right) - \left((d_3 \circ d_1)(x) + (d_3 \circ d_2)(x)\right)$$

$$= \left[(d_1 \circ d_3)(x) - (d_3 \circ d_1)(x)\right] + \left[(d_2 \circ d_3)(x) - (d_3 \circ d_2)(x)\right]$$

$$= [d_1, d_3](x) + [d_2, d_3](x).$$

يترك للطالب اثبات الشروط الثلاثة الباقية.

انتهت المحاضرة الثالثة

الضغوط النفسية...

تغير الشخص من مرح وذكاء هي

لكتلة حزينة من الصمت