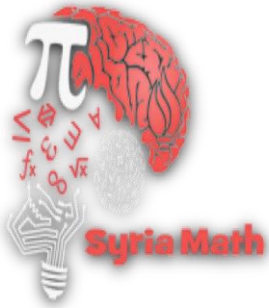

◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄المحاضرة السادسة عنوان المحاضرة : خاصية الاستمرار

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- مبرهنة خاصية الاستمرار من الاعلى .
2- خاصية الاستمرار للقياس الاحتمالي ، وبعض التمارين .

مبرهنة ((هامة ودورة سابقة))

لتكن $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية غير متزايدة باطراد (متناقصة) من احداث F اي ان :

$(A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \dots \dots)$ وكان $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ فإن :

$$P(\bigcap_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

((تدعى خاصية الاستمرار من الاعلى))

البرهان

بما ان المتتالية A_n غير متزايدة فإن متممات (A'_n) ستكون غير متناقصة اي

$$(A'_1 \subseteq A'_2 \subseteq \cdots A'_n \dots)$$

وبالتالي حسب المبرهنة السابقة ((الاطراد المتزايد)) فإن :

$$\lim_{n\to\infty} P(A'_n) = P(\bigcup_{n\geq 1} A'_n) \dots \dots \dots (*)$$

ولكن حسب قانون دومورغان : $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n) = (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)'$

$$P(\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} A'_n) = P(\bigcap_{n\geq 1}^{\infty} A_n)' = 1 - P(\bigcap_{n\geq 1}^{\infty} A_n) \dots \dots (1)$$

$$P(A'_n) = 1 - P(A_n) \dots \dots (2)$$

نعوض كل من (1) و (2) في $((*))$ فنجد ...

$$1 - P(\bigcap_{n\geq 1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty}[1 - P(A_n)] = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Syria Math Team

$$P(\cap_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

((تسمى خاصة الاستمرار من الاعلى))

خاصية الاستمرار للقياس الاحتمالي

إذا كانت $(A_n)_{n\geq 1}$ متتالية مطردة ((متزايدة او متناقصة باطراد)) من احداث F فإن :

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

تتحقق هذه المساواة فقط في حالة الاستمرار.

مبرهنة التكافؤ في النهايات في الاحتمالات ((البرهان غير مطلوب ولله الحمد))

ليكن لدينا (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً عندئذٍ الشروط التية متكافئة

1) قياس احتمالي جمعي تام اي اذا كانت $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من الاحداث متنافية مثنى مثنى من F فإن :

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

2) إذا كانت $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية غير متناقصة من F فإن :

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

3) إذا كانت $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية غير متزايدة من احداث F فإن :

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

4) إذا كانت $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية غير متزايدة ((متناقصة)) من احداث F وكان $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ فإن : $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$

ملاحظة : أشار الدكتور الى ان الامثلة المحلولة في الكتاب من الصفحة 40 إلى الصفحة 45 مطلوبة ولقد قام الدكتور بحل بعضها خلال هذه المحاضرة وسندرج الباقي منها فيما بعد .

تمارين

التمرين (1)

سحبت ورقتان بطريقة عشوائية من 10 ورقات مرقمة من 1 → 10 أوجد احتمال أن يكون مجموعها فردياً اذا تم السحب :

1) ورقتين معاً .
2) ورقة بعد أخرى بدون إعادة .

Syria Math Team

3) ورقة بعد أخرى مع إعادة .

الحل :

1) لنحصل على مجموع فردي يجب الحصول على عدد فردي وعدد زوجي ، وليكن A حدثاً يدل على الحصول على مجموع فردي فيكون :

$$|\Omega| = C_2^{10} = \frac{10\times 9}{2\times 1} = 45$$

$$|A| = C_1^5 \times C_1^5 = 5 \times 5 = 25$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{25}{45} = 0.56$$

2) السحب بدون إعادة ....

$$|\Omega| = C_1^{10} \times C_1^9 = 90$$

$$|B| = \underbrace{C_1^5}_{\text{فردي}} \times \underbrace{C_1^5}_{\text{زوجي}} + \underbrace{C_1^5}_{\text{زوجي}} \times \underbrace{C_1^5}_{\text{فردي}} = 5 \times 5 + 5 \times 5 = 50$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{50}{90} = 0.56$$

3) سحب ورقتان مع إعادة...

$$|\Omega| = C_1^{10} \times C_1^{10} = 10 \times 10 = 100$$

$$|C| = \underbrace{C_1^5}_{\text{فردي}} \times \underbrace{C_1^5}_{\text{زوجي}} + \underbrace{C_1^5}_{\text{زوجي}} \times \underbrace{C_1^5}_{\text{فردي}} = 5 \times 5 + 5 \times 5 = 50$$

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{50}{100} = 0.5$$

التمرين (2)

بدأنا بالصعود في بناء مؤلف من عشر طوابق فإذا بدأنا بالصعود وبه 7 اشخاص وافترضنا انه يتوقف عند كل طابق ، عين احتمال نزول كل من هؤلاء في طابق ((كل شخص منهم نزل في طابق))

الحل :

بفرض أن A حدث مطلوب عندئذٍ :

لكل شخص 10فرص لنزول وعدد الاشخاص 7 وبالتالي فضاء العتبة

$$|\Omega| = (10)^7 = 10000000$$

ويجب ترتيب الـ 7 اشخاص في كل طابق لذلك نأخذ :

$$|A| = P_7^{10} = \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!} = 604800$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{604800}{10000000} \cong 0.06$$

التمرين (3)

سحبنا عينة عشوائية حجمها r من مجموعة عدتها n ، عين احتمال وجود عنصر معين في العينة إذا كان السحب :

1) يجري مع إعادة .
2) يجري دون إعادة .
3) إذا تم السحب مع إعادة ، عين احتمال ظهور كل عنصر مرة واحدة على الأكثر .

الحل :

1) ليكن A الحدث المطلوب ، فيكون A' حادثة عدم ظهور معين من العينة :

إن احتمال اختيار اي عنصر هو n مع إعادة يبقى n وعدد مرات تكرار r ومنه عدة $|\Omega|$:

$$|\Omega| = n^r$$

بعد اختيارنا عنصر معين من عينة يبقى لدينا $(n-1)$ عنصر وعدد تكرار r ومنه :

$$|A'| = (n-1)^r \Rightarrow P(A') = \frac{(n-1)^r}{n^r}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{(n-1)^r}{n^r} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r$$

2) ليكن B الحدث المطلوب ، فيكون B' حادثة عدم ظهور عنصر معين من العينة بحيث إن حادثة اختيار عنصر من عينة عدتها n وبدون إعادة مع تكرار r مرة "

$$|\Omega| = P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

وبعد اختيار عنصر من مجموعة عدتها n فيبقى لدينا $(n-1)$ عنصر منه :

$$|B'| = P_r^{n-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!} \Rightarrow P(B') = \frac{|B'|}{|\Omega|} = \frac{\frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}}{\frac{n!}{(n-r)!}} = \frac{n-r}{n}$$

Syria Math Team

$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{n-r}{n} = 1 - 1 + \frac{r}{n}$$

3) ليكن C الحدث المطلوب ، ولان السحب مع إعادة فيكون :

$$|\Omega| = n^r$$

$$|C| = P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{n^r} = \frac{n(n-1).....(n-r+1)}{n \times n .....\times n}$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{(n-1)}{n} \times \dots\dots \times \frac{n-r+1}{n}$$

$$\Rightarrow P(C) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots\dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right)$$

وهكذا نكون قد انهينا البحث الأول ^_^

إنّ النّفس لجوهرة ثمينة، من صانها رفعها ومن ابتذلها وضعها

لا يكون الصّديق صديقاً حتى يحفظ أخاه في ثلاث: في نكبته وغيبته ووفاته

انتهت المحاضرة

إعداد: نور مهره **منى شغل **إيناس دللي