◄ دكتورة المادة: رشا بعاج

◄ المحاضرة: العاشرة

مرحبا اصدقائي: انتهينا من حل المعادلات غير الخطية والطرق المجالية والآن سنبدأ بفصل جديد وهو:

"الاستيفاء بكثيرات الحدود"

فما هو الاستيفاء؟

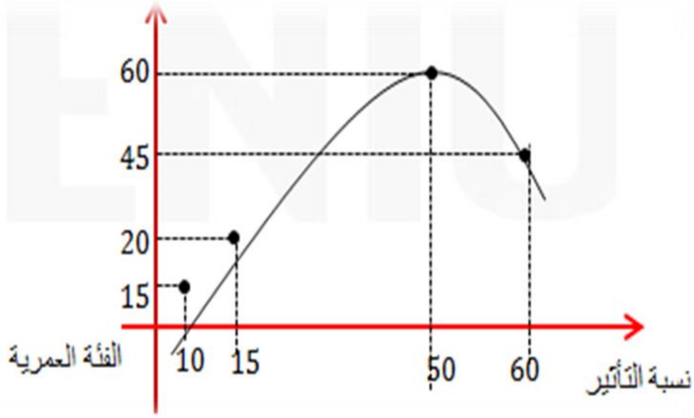
بفرض لدينا مجموعة من النقاط المتمايزة $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$ عندئذٍ تعرف مسألة الاستيفاء: بأنّها عملية إيجاد تابع f يمرّ من هذه النقاط ويحقق الشروط:

$f(x_i) = y_i$ $\quad$ $i = 0,1,2, \dots, n$ $\quad$ عدد النقاط

مقدّمة:

قام أحد الباحثين بدراسة تأثير استخدام الأجهزة الذّكية على تراجع مستوى نشاط المستخدم فكانت النتائج التي حصل عليها من خلال طرح استبيان الرأي لمجموعة من الفئات العمرية بالشكل الآتي:

نسبة التّأثير	الفئة العمريّة
%10	15 سنة
%15	20 سنة
%60	45 سنة
%50	60 سنة



ونظراً لعدم وجود أشخاص من فئات عمرية لتغطية جميع الأعمار، كان لا بد من تقدير الآراء للفئات المختلفة لذا علينا وضع خط بياني يمثّل هذه القيم الفعلية ويساعد في تقدير باقي القيم ،من أجل تحقيق هذا الهدف سنقوم بإجراء الاستيفاء.

- **استخدامات الاستيفاء متعدّدة نذكر منها :**

١. إيجاد تفاضل (تكامل) دالة عند قيمة معينة دون معرفة قاعدة ربط الدالة

٢. تقريب الدالة إلى دالة أبسط منها
٣. رسم خط بياني أملس يمرّ من مجموعة النقاط المفروضة
٤. تصحيح الصور

- **كيف نختار شكل دالة الاستيفاء؟** استخدام كثيرات الحدود
- **ما هي درجة كثير الحدود؟** تعتمد درجة كثير الحدود على عدد النقاط المعطاة والطريقة المستخدمة بالحصول عليها
- **هل هذه الدالة وحيدة؟** نعم وحيدة (مبرهن عليها نظريّاً وغير مطلوب)
- كيف نحصل عليها ؟ من خلال الطرق المدروسة في هذا الفصل

مثال: لتكن لدينا النّقاط $(3,6),(1,3),(0,2)$ أوجد حدودية من الدرجة الثانية تمر من هذه النقاط

عدد النّقاط $(n+1)=3$

$$p_2(x)=ax^2+bx+c$$

$$p_2(0)=2 \implies c=2$$

$$p_2(1)= a+b+c=3 \quad => a+b=1$$

$$p_2(3)= 9a+3b=4$$

بالحل المشترك نجد أنّ $b=\frac{5}{6}$, $a=\frac{1}{6}$, $p_2(x)=\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{6}x+2$

طريقة لاغرانج:

لتكن لدينا مجموعة النقاط $(x_0,y_0),(x_1,y_1)\dots(x_n,y_n)$ عندئذ تعطى كثيرة الحدود لاغرانج بالشكل :

$$p_n(x)=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1+\cdots+L_n(x)\,y_n$$

حيث $L_n(x),\dots,L_1(x),L_0(x)$ معاملات لاغرانج وهي تمثّل حدوديات من الدرجة n أو أقل وتعطى بالعلاقة:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}$$

البسط عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة n

المقام عبارة عن عدد

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}$$

•
•

$$L_n(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots\dots(x_n-x_{n-1})}$$

للتأكد من أنّ هذا البناء صحيح: $p_n(x) = L_0(x)y_0 + \cdots \dots \dots \dots + L_n(x)y_n$

$$p_n(x) = y_i$$

$$L_0(x_0)y_0 + L(x_0)y_1 + \cdots + L_n(x_0)y_n = y_0 \quad \Longrightarrow \quad y_0 = y_0$$

بشكل مماثل سينتج لدينا $y_1 = y_1$ إذاً البناء صحيح.

مثال بفرض لدينا الجدول التالي:

x	$x_0 = -2$	$x_1 = 0$	$x_2 = 2$
$f(x)$	4	2	8

أوجد كثير حدود الاستيفاء التي تستوفي هذه النقاط باستخدام طريقة لاغرانج.

الحل: بدايةً سنقوم بإيجاد $p_2(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(-2-0)(-2-2)} = \frac{x(x-2)}{8} = \frac{1}{8}x(x-2)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+2)(x-2)}{(0-(-2))(0-2)} = -\frac{(x+2)(x-2)}{4}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-(-2))(x-0)}{(2-(-2))(2-0)} = \frac{x(x+2)}{8}$$

وعليه فإنّ $p_2(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$

$$p_2(x) = \frac{1}{8}x(x-2)(4) - \frac{1}{4}(x+2)(x-2)(2) + \frac{1}{8}x(x+2)(8)$$

$$p_2(x) = \tfrac{1}{2}x(x-2) - \tfrac{1}{2}(x+2)(x-2) + x(x+2) \dots \dots \dots .. (*)$$

إذا طلب أوجد قيمة الدالة عند $x = 1$ لحساب $f(1)$ نحسب $p_2(1)$ حيث نعوض قيمة ال x في (*)

لأن $f(1) \approx p_2(1)$

حل تمرين الوظيفة : لتكن لدينا مجموعة البيانات التالية :

x	$x_0 = 2$	$x_1 = 2{,}5$	$x_2 = 4$
$f(x)$	0,5	0,4	0,25

أوجد كثير حدود الاستيفاء التي تستوفي هذه النقاط باستخدام طريقة لاغرانج :

الحل: عدد النقاط 3 ناقص 1 $<= \quad n = 2$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2{,}5)(x-4)}{(2-2{,}5)(2-4)} = \frac{(x-2{,}5)(x-4)}{(-0{,}5)(-2)} = (x-2{,}5)(x-4)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)\,(x_1-x_2)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(2{,}5-2)(2{,}5-4)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(0{,}5)(-1{,}5)}$$
$$= -\frac{1}{0{,}75}(x-2)(x-4)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-2)(x-2{,}5)}{(4-2)(4-2{,}5)} = \frac{(x-2)(x-2{,}5)}{(2)(1{,}5)} = \frac{1}{3}(x-2)(x-2{,}5)$$

$$p_2(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$$
$$= (x-2{,}5)(x-4)(0{,}5) \pm \frac{1}{0{,}75}(x-2)(x-4)(0{,}4)$$
$$+\frac{1}{3}(x-2)(x-2{,}5)(0{,}25)$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(x-2{,}5)(x-4) - \frac{8}{15}(x-2)(x-4) + \frac{1}{12}(x-2)(x-2{,}5)$$

- **ملاحظات:**

١) إذا كانت إحدى قيم الدالة معدومة عندئذ لا نحسب معامل لاغرانج المقابل

٢) ترتيب اسماء النقاط أمر اختياري لكن يجب تثبيت التسمية من بداية الحل حتى نهايته

٣) يمنع منعا باتا إصلاح الشكل النهائي لكثيرة الحدود وفك الأقواس أثناء الحل.

حساب E_{exact} (الخطأ الفعلي المرتكب في كثيرة حدود الاستيفاء)

$$Eexact = |T - Q| = |f(x) - p_n(x)|$$

وبالتالي يمكن حساب الخطأ الفعلي عند نقاط تختلف عن النقاط المعطاة إذا كنا نعرف الدالة f

- إذا طلب منا حساب $Eexact$ للقيمة $p_2(3)$ نطبق القانون: $Eexact = |T - Q|$

حيث Q هي $p_2(3)$

T هي y_3 ولكن y_3 غير معلومة

لا يطلب

- أمّا إذ طلب عند أحد النّقاط المعطاة مثلاً عند النّقطة 2 ، $Eexact = |T - Q|$

Q هي $p_2(2)$

T هي $f(2) = y(2)$

نعوّض

دوماً $Eexact = |y(2) - p_2(2)| = 0$

ملاحظة: قيمة الدالة = قيمة الحدودية عند النقاط المعطاة

دراسة الخطأ في حدودية استيفاء لاغرانج:

ليكن لدينا مجموعة من النقاط $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$ حيث يوجد لدينا $(n+1)$ نقطة مختلفة فإنّ الخطأ المرتكب في طريقة لاغرانج هو: $E_{max} = \frac{p_{n+1}}{(n+1)!} f_{(\theta)}^{(n+1)}$

حيث : لحساب p_{n+1} يوجد حالتين:

أ- إذا كانت النقاط متساوية البعد عن بعضها البعض نطبق: $\max|p_{n+1}| \le \frac{h^{n+1}}{4} n!$

حيث $h = |x_i - x_{i-1}|$ أي الفرق بين نقطتين متتاليتين :

$$\forall i = 1,2, \dots, n$$

ب- إذا كانت النقاط غير متساوية البعد: (عندما يوجد لدينا نقطة نريد إيجاد الخطأ عندها):

نقوم بتعويض قيمة النقطة في القانون p_{n+1}

$$p_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

علماً أنّ هذا غير صحيح وسنتعلّم طريقة أصح في مقرر التّحليل العددي(2)

- $f^{(n+1)}(\theta)$ هي المشتق من الدرجة $n+1$ و θ هي القيمة التي يكون عندها المشتق أعظميّاً

ميزات طريقة لاغرانج:

١) لا تحتاج لأن تكون النقاط متساوية البعد عن بعضها البعض.
٢) صيغة لاغرانج لحدودية الاستيفاء مفيدة جدا لأنها تتطلب منا حل جملة من المعادلات الخطية (حسب الطريقة العامة)
٣) توضح لنا صيغة لاغرانج بشكل صريح تأثير قيم الدالة f_i على حدودية الاستيفاء.

عيوب طريقة لاغرانج

١) أن زيادة أو نقصان عدد النقاط يتطلب إعادة حساب جميع المعاملات L_i حيث $i = 0, \dots \dots, n$
٢) إن درجة الحدودية التي تستوفي (n+1) نقطة هي n (الأمر التي يعني هذه الطريقة ذات تكلفة حسابية عالية).

مثال: ليكن لدينا جدول البيانات التالي:

x_k	$x_0 = 0$	$x_1 = 0{,}6$
$\ln(x+1)$	$y_0 = 0$	$y_1 = 0{,}47$

أوجد حدودية لاغرانج الخطية التي تستوفي النقاط السابقة :

أوجد الخطأ النظري (الأعظمي) والخطأ الفعلي عند $x = 0{,}45$ إذا علمت أن : $f(x) = \ln(x+1)$

(الحل):

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} = \frac{x - 0{,}6}{0 - 0{,}6} = -\frac{1}{0{,}6}(x - 0{,}6)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{x - 0}{0{,}6 - 0} = \frac{1}{0{,}6}(x)$$

$$p_1(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1$$

$$p_1(x) = -\frac{1}{0.6}(x - 0.6)(0) + \frac{1}{0.6}(x)(0.47)$$

$$p_1(x) = 0 + 0.7833333x = 0.7833333x$$

الخطأ الأعظمي (النظري) $E_{max} = |\frac{p_{n+1}}{(n+1)!} f_{(\theta)}^{n+1}|$

- نوجد p_{n+1} نلاحظ أنّه يوجد لدينا نقطتان فقط أي البعد بينهما واحد أي ثابت لذلك نطبّق:

$$p_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{4} n!$$

حيث h هي الفرق بين نقطتين متتاليتين $h = 0{,}6$ ، $maxp_{n+1} = \frac{[0{,}6]^2}{4}(1)!$

$$f^{(n+1)}(\theta) = f^2(\theta)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Longrightarrow f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$p_{n+1} = \frac{(0.6)^2}{4}$$

$|f''(x)|$ دالة متناقصة تبلغ قيمتها العظمى عندما $x = 0$ الواحد

$$E_{max}(0.45) \leq 0.045$$

بما أن $Q = p_2(0.45)$ $T = \ln(1.45)$ حيث: $f(x) = \ln(x + 1)$

$$E_{max} = |T - Q| = |0.37156 - 0.352509| = 0.019057$$

انتهت المحاضرة

إعداد: راما جوهر & هديل سعيد & علا الدالاتي