نظري

◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄ المحاضرة : الثالثة عشرة   عنوان المحاضرة: المتتاليات المنشطرة

المتتاليات المنشطرة

تعريف : لتكن لدينا المتتالية:

$$(*) \qquad \mathbf{0} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

متتالية من التشاكلات المودولية نقول عن $(*)$ أنها منشطرة إذا وجد تشاكل مودولي :

$$s : P \longrightarrow N \quad : g \circ s = \underbrace{1}_{\text{التطبيق مطابق}}$$

ملاحظة : اذا كانت $(*)$ تامة عندها f متباين و g غامر و $Imf = kerg$

لكي تكون $(*)$ منشطرة هذا يعني

$$\exists\, s : P \xrightarrow{\text{تشاكل مودولي}} N \ \ ; \ g \circ s = 1$$

أي إن s موجود كتطبيق لان g غامر ولكن الصعوبة في بناء s كتشاكل .

مبرهنة : لتكن المتتالية القصيرة التامة التالية :

$$(*) \quad \mathbf{0} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

إن $(*)$ منشطرة $\Leftrightarrow N = N_1 \oplus kerg$

حيث N_1 مودول معين جزئي في N .

البرهان :

$\Leftarrow$ بفرض $(*)$ منشطرة أي أن :

$$\exists\, s : P \xrightarrow{\text{تشاكل مودولي}} N \ \ ; \ g \circ s = 1$$

ولنبرهن أن $N = Ims \oplus kerg$ أي يجب برهان أن $N = Ims + kerg$ و $Ims \cap kerg = 0$

وذلك بأخذ $N_1 = Ims$ (لان Ims مودول جزئي من N).

مهما يكن $n \in N$ فإن : $n - s(g(n)) \in N$

$$\Rightarrow g\left(n - s(g(n))\right) \underbrace{=}_{g \text{ تشاكل}} g(n) - g\left(s(g(n))\right)$$

وبما أن $g \circ s = 1$ فإن :

$$= g(n) - g(n) = 0 \quad \Rightarrow n - s(g(n)) \in kerg$$

وبالتالي يوجد $\varphi \in kerg$ بحيث :

$$n - s(g(n)) = \varphi \quad \Rightarrow n = \underbrace{s(g(n))}_{\in Ims} + \underbrace{\varphi}_{\in kerg} \in Ims + kerg$$

$$\Rightarrow N \subseteq Ims + kerg$$

وإن $Ims + kerg \subseteq N$ لأن $kerg$ و Ims مودولات جزئية في N ومن الاحتوائين نجد أن :

$$Ims + kerg = N$$

لنبرهن الشرط الثاني

$$Ims \cap kerg = 0$$

$$\beta \in Ims \cap kerg \quad \Rightarrow \beta \in Ims \quad , \quad \beta \in kerg$$

$$\Rightarrow g(\beta) = 0 \quad , \qquad \exists\, p \in P \;;\; \beta = s(p)$$

$$0 = g(\beta) = g(s(p)) \underbrace{=}_{gos=1} P \Rightarrow P = 0$$

ومنه : $\beta = s(p) = s(0) \underbrace{=}_{s \text{ تشاكل}} 0$ ومنه نجد : $0 = Ims \cap kerg$

مما سبق نجد أن : $N = Ims \oplus kerg$

$\Leftarrow$ ليكن $N = N_1 \oplus kerg$ والمطلوب إيجاد تشاكل مودولي $S : P \longrightarrow N$ بحيث $g \circ s = 1$

لنأخذ $g_{\backslash N_1}$ مقصور التشاكل g على N_1 ولنبرهن أنه تماثل :

$$g_{\backslash N_1} : N_1 \longrightarrow P$$
$$n_1 \longrightarrow g_{\backslash N_1}(n_1) = g(n_1)$$

$g_{\backslash N_1}(n_1) = g(n_1)$ لان قاعدتا الربط متساويتين وذلك حسب تعريف المقصور

- إن $g_{\backslash N_1}$ تطبيق تشاكل وذلك حسب تعريف المقصور .
- إن $g_{\backslash N_1}$ متباين لأن :

لتكن $n_1, n_2 \in N_1$ و $g_{\backslash N_1}(n_1) = g_{\backslash N_1}(n_2)$

$$g(n_1) = g(n_2)$$

تشاكل $g \Longrightarrow g(n_1 - n_2) = 0 \Longrightarrow n_1 - n_2 \in kerg$

ولدينا $n_1 - n_2 \in N_1$ حسب الفرض وبما أن $N = N_1 \oplus kerg$ مجموع مباشر فإن:

$$N_1 \cap kerg = 0$$

$$n_1 - n_2 \in N_1 \cap kerg \Longrightarrow n_1 - n_2 = 0 \Longrightarrow n_1 = n_2$$

- إن $g_{\backslash N_1}$ غامر لأنه : إن $(*)$ تامة فإن g غامر وبالتالي

$$p \in P \ ; \ \exists\, n \in \mathrm{N} \ ; g(n) = p \ \ldots\ldots (1)$$

وحسب الفرض $N = N_1 \oplus kerg$

$$\forall n \in N \ ; \ \exists\, n_1 \in N_1 \ ; \ \exists a \in kerg \Longrightarrow n = n_1 + a$$

$$\Longrightarrow p = g(n) = g(n_1 + a) = g(n_1) + g(a) = g(n_1) + 0$$
$$= g_{\backslash N_1}(n_1) + 0 = g_{\backslash N_1}(n_1) \ldots\ldots (2)$$

يكفي اثبات أن $g_{\backslash N_1}(n_1) = p$ لكي يكون $g_{\backslash N_1}$ غامر

لدينا $n_1 \in N_1$ و $p \underbrace{=}_{\text{حسب } 1} g(n) \underbrace{=}_{\text{حسب } 2} g(n_1) = g_{\backslash N_1}(n_1)$ وبالتالي $g_{\backslash N_1}$ غامر

وبالتالي $g_{\backslash N_1}$ تقابل وهو تشاكل لأنه مقصور لتشاكل $\Longleftarrow$ $g_{\backslash N_1}$ تماثل .

إذاً يوجد $\left(g_{\backslash N_1}\right)^{-1}$ الذي هو التقابل العكسي لـ $\left(g_{\backslash N_1}\right)$ ونرمز له بـ s

$$s : p \longrightarrow N$$

$$\forall\, p \in P :\ s(p) = \left(g_{\backslash N_1}\right)^{-1}(p)$$

بقي علينا اثبات أن $gos = 1$ ومنه $\forall\, p \in P$ فإن :

$$gos(p) = g\big(s(p)\big) = g\left(\underbrace{\left(g_{\backslash N_1}\right)^{-1}(p)}_{\in N_1}\right) = g_{\backslash N_1}\left(\left(g_{\backslash N_1}\right)^{-1}(p)\right)$$
$$= g_{\backslash N_1} \circ \left(g_{\backslash N_1}\right)^{-1}(p) = p$$

ومنه إن التطبيق gos يصور كل عنصر بنفسه أي $gos = 1$ وبالتالي $(*)$ منشطرة.

نتيجة : لتكن المتتالية $\mathbf{0} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} p \longrightarrow 0 \qquad (*)$

متتالية قصيرة تامة عندئذٍ المتتالية $(*)$ منشطرة $\Leftarrow N \cong p \oplus M$

البرهان

إن $(*)$ منشطرة وبالتالي $\qquad \exists\, s \in Hom(p,N)\ ;\ g \circ s = 1$

بما أن $(*)$ منشطرة وحسب المبرهنة السابقة : $\qquad N = Ims \oplus kerg \quad (@)$

- $(*)$ تامة فإن : $Imf = kerg$ و f متباين بالتالي
وبأخذ المستقر الفعلي ل f يصبح لدينا التطبيق التالي تماثل $M \longrightarrow Imf$ أي

$$kerg = Imf \cong M \Leftarrow \qquad kerg \cong M\ (١)$$

- إن s تطبيق وهو تشاكل ولنثبت أنه متباين :

$$\forall p_1, p_2 \in P \quad : s(p_1) = s(p_2)$$

$$\xRightarrow{\text{نصور وفق } g} g\big(s(p_1)\big) = g\big(s(p_2)\big) \Rightarrow p_1 = p_2$$

وباخذ المستقر الفعلي فيكون غامر أي انه يوجد تماثل بالتالي $\quad Ims \cong p \quad (٢)$

بتعويض (١) و (٢) في @:

$$N \cong P \oplus M$$

ملاحظة : إن عكس النتيجة السابقة صحيح وذلك ما سنستخدمه في حل التمارين .

تمرين : بين فيما إذا كانت المتتاليتين التاليتين منشطرتين أم لا ؟؟ (Z مجموعة الاعدادا الصحيحة).

١)
$$0 \longrightarrow \frac{Z}{2Z} \xrightarrow{f} \frac{Z}{2Z} \times \frac{Z}{2Z} \xrightarrow{g} \frac{Z}{2Z} \longrightarrow 0$$

$$\bar{a} \longrightarrow (\bar{a}, 0)$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) \longrightarrow \bar{b}$$

الحل :

بالاعتماد على النتيجة السابقة يجب برهان أولاً أن المتتالية تامة

إن عناصر $\frac{Z}{2Z}$ هي $\{\bar{0}, \bar{1}\} = \frac{Z}{2Z}$

إن عناصر $\frac{Z}{2Z} \times \frac{Z}{2Z}$ هي $\frac{Z}{2Z} \times \frac{Z}{2Z} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$

- إن $kerf = \{0\}$ ومنه f متباين (العناصر التي صورتها صفر وفق f هي فقط الصفر)
- إن g غامر لأن $g(\bar{0}, \bar{0}) = \bar{0}$ و $g(\bar{0}, \bar{1}) = \bar{1}$ (أي لكل عنصر من المستقر يوجد عنصر من المنطلق صورته عنصر المستقر)
- $kerg = Imf$ لأن $Imf = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0})\}$ و $kerg = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0})\}$ أي أن المتتالية تامة

إن

$$\frac{Z}{2Z} \times \frac{Z}{2Z} \cong \frac{Z}{2Z} \oplus \frac{Z}{2Z}$$

لأن الجداء الديكارتي لأسرة منتهية يساوي المجموع المباشر لهذه الأسرة وحسب النتيجة السابقة نجد أن المتتالية منشطرة.

٢)
$$0 \longrightarrow \frac{Z}{2Z} \xrightarrow{f} \frac{Z}{4Z} \xrightarrow{g} \frac{Z}{2Z} \longrightarrow 0$$

$$a + 2Z \xrightarrow{f} 2a + 4Z \quad , \quad b + 4Z \xrightarrow{g} b + 2Z$$

الحل :

لنثبت ان المتتالية تامة

إن عناصر $\frac{Z}{2Z}$ هي $\{\bar{0}, \bar{1}\} = \frac{Z}{2Z}$

إن عناصر $\frac{Z}{4Z}$ هي $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} = \frac{Z}{4Z}$

$$\left.\begin{array}{l}\bar{0}\xrightarrow{g}\bar{0}\\ \bar{1}\xrightarrow{g}\bar{1}\\ \bar{2}\xrightarrow{g}\bar{0}\\ \bar{3}\xrightarrow{g}\bar{1}\end{array}\right\}$$ g غامر

$$\left.\begin{array}{l}\bar{0}\xrightarrow{f}\bar{0}\\ \bar{1}\xrightarrow{f}\bar{2}\end{array}\right\}$$ f متباين

- $kerg = Imf$ لان $Imf = \{\bar{0},\bar{2}\}$ و $kerg = \{\bar{0},\bar{2}\}$ إن

$$\frac{Z}{4Z} \cong \frac{Z}{2Z} \oplus \frac{Z}{2Z}$$

نلاحظ ان $\frac{Z}{4Z}$ زمرة دوارة و $\frac{Z}{2Z} \oplus \frac{Z}{2Z}$ زمرة تبديلية وليست دوارة ومنه هذا التماثل غير صحيح والمتتالية غير منشطرة .

انتهت المحاضرة

٣) **وظيفة**

$$\mathbf{0} \longrightarrow 2Z \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} \frac{Z}{2Z} \longrightarrow 0$$

$$a \xrightarrow{f} a \quad , \quad x \xrightarrow{g} x + 2Z$$

الحل :

لنثبت ان المتتالية تامة

- لدينا f الاحتواء (التباين) القانوني وايضاً لدينا g تشاكل الغمر القانوني نواته هي $2Z$ أي $kerg = 2Z$ ومن جهة أخرى

$$Imf = \{f(a): a \in 2Z\} = \{a \ : a \in 2Z\} = 2Z$$

أي أن $kerg = Imf$ ومنه المتتالية تامة

- لنفرض جدلاً أنها منشطرة ومنه يوجد $s \ : \ \frac{Z}{2Z} \xrightarrow{\text{تشاكل مودولي}} Z \quad : \quad gos = 1$

$$x + 2Z \longrightarrow x$$

وبالتالي $\bar{0} \in \frac{Z}{2Z}$: $s(\bar{0}) = 0$ وذلك لأن s تشاكل

ومن جهة أخرى لدينا $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ ومنه

$$s(\bar{0}) = s(\bar{1}+\bar{1}) \underbrace{=}_{\text{تشاكل } s} s(\bar{1})+s(\bar{1}) \underbrace{=}_{\text{حسب قاعدة الربط}} 1+1 = 2$$

$$\Longrightarrow s(\bar{0}) = 2$$

أصبح لدينا $s(\bar{0}) = 0 \quad , \quad s(\bar{0}) = 2$ وهذا تناقض كون s تشاكل ومنه المتتالية غير منشطرة

حل وظيفة المحاضرة السابقة

إثبات ان

$$(\mathbf{2}) \quad Hom_A(\oplus_{i\in I} M_i \,, N) \cong \prod_{i\in I} Hom_A\,(M_i, N)$$

البرهان

لنبني العلاقة

$$\delta : \quad Hom_A(\oplus_{i\in I} M_i \,, N) \to \prod_{i\in I} Hom_A\,(M_i, N)$$

$$f \to \delta(f) = (f\ o\ in_i)_{i\in I}$$

- إنَّ δ تطبيق لأنَّ:

$$\forall\ f_1, f_2 \ \in Hom_A(\oplus_{i\in I} M_i \,, N) \ ; \ \ f_1 = f_2$$

$$f_1\ o\ in_i = f_2\ o\ in_i \quad \underbrace{\Rightarrow}_{i\in I \text{ تساوت المركبات المتقابلة}} \quad (f_1\ o\ in_i)_{i\in I} = (f_2\ o\ in_i)_{i\in I}\ ;\ \forall i\in I$$

$$\Rightarrow \delta(f_1) = \delta(f_2)$$

- إنَّ δ تشاكل زمري (لذلك سنكتفي بشرط واحد) لأنَّ:

$$\delta(f_1+f_2) \overset{\text{حسب قاعدة الربط}}{=} \big((f_1+f_2)\ o\ in_i\big)_{i\in I} = (f_1\ o\ in_i)_{i\in I} + (f_2\ o\ in_i)_{i\in I}$$

$$= \ \delta(f_1) + \delta(f_2)$$

- إنَّ δ تقابل لأنَّ: ليكن $(g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Hom_A\,(M_i, N)$ عنصر كيفي من المستقر حيث $i\in I$: $g_i : M_i \to N$ تشاكل

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "in_i"] \arrow[d, "g_i"'] & \oplus_{i\in I} M_i \arrow[dl, dotted, "h"] \\ N & \end{tikzcd}$$

لكن $\left(\bigoplus_{i\in I} M_i , \{in_i\}_{i\in I}\right\}$ تشكل جداء مرافق للأسرة

$\{M_i\}_{i\in I}$ وذلك حسب مبرهنة سابقة إذاً يوجد تشاكل وحيد :

$h : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ بحيث

$h \circ in_i = g_i \; ; \; \forall\, i \in I$ ولكن $\delta(h) = (h \circ in_i)_{i\in I} = (g_i)_{i\in I}$ أي يوجد h عنصر وحيد من المنطلق بحيث $\delta(h) = (g_i)_{i\in I} \;\; \Leftarrow \delta$ تقابل وبالتالي $(\mathbf{2})$ تماثل زمري .

نعتذر عن ورود بعض الأخطاء في المحاضرة ال ١٢

الصفحة (١) السطر (٦)

$M_i \in M$ لأن مودول جزئي من M $(\forall i \in I)$

الصواب هو

$m_i \in M$ لأن M_i مودول جزئي من M $(\forall i \in I)$

الصفحة (٣) السطر (٨)

لكن $\left(\prod_{i\in I} M_i \,, \{Pr\}_{i\in I}\right\}$ تشكل جداء للأسرة

الصواب هو

لكن $\left(\prod_{i\in I} M_i \,, \{Pr_i\}_{i\in I}\right\}$ تشكل جداء للأسرة

الصفحة (٤) السطر (٢)

وكذلك لدينا $(C, \{g_i\}_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$

الصواب هو

وكذلك لدينا $(C, \{f_i\}_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$

كما في أي شي اخر ، كذلك في الرياضيات يمكن لحظ الجمال ولا يمكن شرحه

ارثر كايلي .....

إعداد: لبنى الطون – احمد أبو التوت – شهد الحايك البوشي