

◀ دكتورة المادة: نور غازي

◀ المحاضرة: الثانية عشر ◀ عنوان المحاضرة: المجموع المباشر الداخلي

المستوى العلمي: أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١- المجموع المباشر الداخلي.

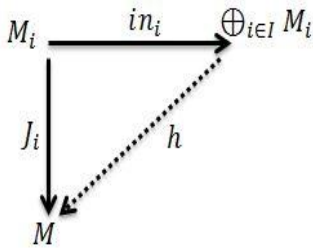
المجموع المباشر الداخلي

تعريف: ليكن M مودول على حلقة A ولتكن أسرة من المودولات الجزئية من M نقول عن M إنه مجموع مباشر داخلي للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$ إذا تحقق: $M \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$.

(توضيح أكثر للتعريف) لدينا M مودول على A ولنعرف J_i وهو التباين (الاحتواء) القانوني:

$$J_i : M_i \rightarrow M$$

$$m_i \rightarrow m_i ; \forall i \in I$$



$M_i \in M$ لأن مودول جزئي من M ($\forall i \in I$) ولنقوم بدراسة شكل عناصر M إن $\bigoplus_{i \in I} M_i$ هو المجموع المباشر للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$ وحسب مبرهنة سابقة نقول أن $(\bigoplus_{i \in I} M_i, \{in_i\}_{i \in I})$ تشكل جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$.

إذاً يوجد تشاكل h وحيد بحيث يجعل المخطط تبديلي أي أنه

$$\text{إن } h \circ in_i = J_i : \forall i \in I$$

$$h : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M$$

$$(m_i)_{i \in I} \rightarrow \sum_{i \in I} J_i(m_i) = \sum_{i \in I} m_i \in \sum_{i \in I} M_i$$

حيث: m_i تكتب على شكل أصفار إلا عدد منتهي منها.

- إن $M \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$ هذا يبين أن h تماثل .

- h غامر $\Leftrightarrow (*) \Leftrightarrow \forall m \in M : \exists (m_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i : \sum_{i \in I} m_i = m$...

- h متباين $\Leftrightarrow (*)$ تكتب بشكل وحيد ، إذا الصفر يكتب كتركيب خطي بأسلوب وحيد .

وبالتالي مما سبق نجد ان كل عنصر $m \in M$ التي تحقق $(M \cong \bigoplus_{i \in I} M_i)$ يكتب على شكل مجموع منتهي $\sum_{i \in I} m_i$ حيث $m_i \in M_i$ وهذه الكتابة وحيدة.

مبرهنة (دون برهان) لتكن $\{M_i\}_{i \in I}$ أسرة من المودولات الجزئية من المودول M عندها الشروط الاتية متكافئة:

$$(1) \sum_{i \in I} M_i \text{ منتهي مباشر داخلي للأسرة } \{M_i\}_{i \in I}.$$

$$(2) \text{ اذا كان } m_i \in M_i : m_i = 0 \text{ منتهي } \sum_{i \in I} m_i \text{ عندها } \forall i \in I : m_i = 0$$

$$(3) O = M_j \cap \left(\sum_{i \neq j} M_i \right) \text{ (المودول الصفري) وذلك أيّاً كان } j \text{ من } I.$$

ملاحظة: ليكن M مودول على A و M_1 و M_2 مودولات جزئية من M عندئذٍ فإن:

$$\Leftrightarrow M = M_1 \oplus M_2 \Leftrightarrow \forall m \in M : m = \underbrace{m_1}_{\in M_1} + \underbrace{m_2}_{\in M_2} \text{ وهذه الكتابة وحيدة } \Leftrightarrow$$

$$M_1 \cap M_2 = O \text{ و } M = M_1 + M_2$$

مبرهنة: لتكن $\{M_i\}_{i \in I}$ أسرة من المودولات على A ، وليكن N مودول على A ، عندئذٍ يوجد تماثلين زمريين:

$$(1) \text{ Hom}_A \left(N, \prod_{i \in I} M_i \right) \cong \prod_{i \in I} \text{ Hom}_A (N, M_i)$$

$$(2) \text{ Hom}_A \left(\bigoplus_{i \in I} M_i, N \right) \cong \prod_{i \in I} \text{ Hom}_A (M_i, N)$$

البرهان

لنأخذ العلاقة (1): ولنبنى العلاقة

$$\delta : \text{ Hom}_A \left(N, \prod_{i \in I} M_i \right) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{ Hom}_A (N, M_i)$$

$$f \rightarrow \delta(f) = \left(Pr_i \circ f \right)_{i \in I}$$

- إن δ تطبيق لأن:

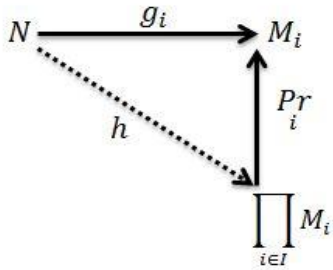
$$\forall f_1, f_2 \in \text{ Hom}_A \left(N, \prod_{i \in I} M_i \right) ; f_1 = f_2$$

$$Pr_i \circ f_1 = Pr_i \circ f_2 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\left(Pr_i \circ f_1 \right)_{i \in I}}_{\text{تساوت المركبات المتقابلة}} = \left(Pr_i \circ f_2 \right)_{i \in I} ; \forall i \in I$$

$$\Rightarrow \delta(f_1) = \delta(f_2)$$

- إنَّ δ تشاكل زمري (لذلك سنكتفي بشرط واحد) لأنَّ:

$$\delta(f_1 + f_2) \stackrel{\text{حسب قاعدة الربط}}{\cong} \left(Pr_i \circ (f_1 + f_2) \right)_{i \in I} \stackrel{\text{تشاكل } Pr_i}{\cong} \left(Pr_i \circ f_1 \right)_{i \in I} + \left(Pr_i \circ f_2 \right)_{i \in I}$$



$$= \delta(f_1) + \delta(f_2)$$

- إنَّ δ تقابل لأنَّ: ليكن $\forall (g_i)_{i \in I} \in Hom_A(N, M_i)$

عنصر كفي من المستقر حيث $g_i: N \rightarrow M_i ; i \in I$ تشاكل لكن $\left(\prod_{i \in I} M_i, \{Pr_i\}_{i \in I} \right)$ تشكل جداء للأسرة

$\{M_i\}_{i \in I}$ وذلك حسب مبرهنة سابقة إذا يوجد تشاكل وحيد:

بحيث $h: N \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$

المنطلق بحيث $\delta(h) = (g_i)_{i \in I}$ وبالتالي (1) تماثل زمري. $\delta(h) = (Pr_i \circ h)_{i \in I} = (g_i)_{i \in I}$ ولكن $Pr_i \circ h = g_i ; \forall i \in I$ أي يوجد عنصر وحيد من h

ملاحظة: لاثبات أن تطبيق ما غامر نأخذ عنصر كفي من المستقر ونجد عنصر من المنطلق صورته هي العنصر الكفي ولكن اذا كان هذا العنصر وحيد فبذلك يكون قد تم اثبات انه متباين وغامر أي تقابل. أما إثبات (2) فهو وظيفة ...

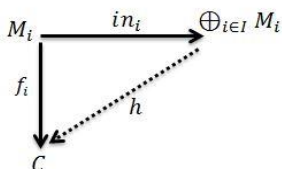
انتهت المحاضرة

حل وظيفة المحاضرة السابقة

مبرهنة: أي جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$ يماثل $(\bigoplus_{i \in I} M_i, \{in_i\}_{i \in I})$.

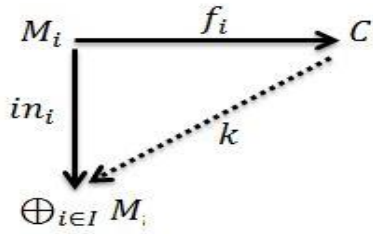
البرهان

لنفرض $(C, \{f_i\}_{i \in I})$ جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$ ولنبرهن أن: $\bigoplus_{i \in I} M_i \cong C$



عندئذ بما أن $(\bigoplus_{i \in I} M_i, \{in_i\}_{i \in I})$ جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$

فإنه عندئذ يوجد تشاكل وحيد $\exists! h: \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow C$



بحيث $h \circ in_i = f_i : \forall i \in I$

وكذلك لدينا $(C, \{g_i\}_{i \in I})$ جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$

عندئذ يوجد تشاكل وحيد $\exists! k : C \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$

بحيث $k \circ f_i = in_i \quad \forall i \in I$

أصبح لدينا $\bigoplus_{i \in I} M_i \xrightarrow[k]{h} C$ ولدينا $k \circ f_i = in_i, h \circ in_i = f_i : \forall i \in I$

ولدينا $f_i = h \circ in_i = h \circ (k \circ f_i) = (h \circ k) \circ f_i$

ولكن $f_i = Id \circ f_i$ و h, k وحيدين بحيث ماسبق محقق إذاً $h \circ k = Id$

ومن جهة أخرى :

ولدينا $in_i = k \circ f_i = k \circ (h \circ in_i) = (k \circ h) \circ in_i$

ولكن $in_i = Id \circ in_i$ و h, k وحيدين بحيث ماسبق محقق إذاً $k \circ h = Id$

إذاً h تقابل و $h^{-1} = k$ وهو تشاكل $\Leftarrow h$ تماثل ومنه $\bigoplus_{i \in I} M_i \cong C$.

انتهى الحل

لولا وجود عكس المعنى لما وجد للمعنى معنى ...

لولا وجود الحزن لما وجد للفرح معنى ...

لولا وجود الفشل لما وجد للنجاح معنى ...

إعداد: لبنى الطون - احمد أبو النوت - شهد الحايك البوشي