◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄ المحاضرة: الثانية عشر ◄ عنوان المحاضرة: المجموع المباشر الداخلي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ المجموع المباشر الداخلي.

المجموع المباشر الداخلي

تعريف: ليكن M مودول على حلقة A ولتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات الجزئية من M نقول عن M إنّه مجموع مباشر داخلي للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ اذا تحقق: $M \cong \bigoplus_{i\in I} M_i$.

(توضيح أكثر للتعريف) لدينا M مودول على A ولنعرف J_i وهو التباين (الاحتواء) القانوني :

$$J_i : M_i \to M$$
$$m_i \to m_i \quad ; \quad \forall\, i \in I$$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "in_i"] \arrow[d, "J_i"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[dl, dotted, "h"] \\ M & \end{tikzcd}$$

$M_i \in M$ لأن مودول جزئي من M $(\forall i \in I)$ ولنقوم بدراسة شكل عناصر M إن $\bigoplus_{i\in I} M_i$ هو المجموع المباشر للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ وحسب مبرهنة سابقة تقول أن $(\bigoplus_{i\in I} M_i, \{in_i\}_{i\in I})$ تشكل جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$.

إذاً يوجد تشاكل h وحيد بحيث يجعل المخطط تبديلي أي أنه

$$h\ o\ in_i = J_i \quad : \quad \forall\, i \in I$$ إن

$$h : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$$
$$(m_i)_{i\in I} \to \sum_{i\in I \text{ منتهي}} J_i(m_i) = \sum_{i\in I \text{ منتهي}} m_i \in \sum_{i\in I} M_i$$

حيث: m_i تكتب على شكل أصفار إلا عدد منتهي منها.

- إن $M \cong \bigoplus_{i\in I} M_i$ هذا يبين أن h تماثل .
- h غامر $\Leftrightarrow$ $\forall\, m \in M : \exists\, (m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i : \sum_{i\in I} m_i = m \dots (*)$
- h متباين $\Leftrightarrow$ $(*)$ تكتب بشكل وحيد ، إذا الصفر يكتب كتركيب خطي بأسلوب وحيد .

وبالتالي مما سبق نجد ان كل عنصر $m \in M$ (M التي تحقق $(M \cong \bigoplus_{i\in I} M_i)$).
يكتب على شكل مجموع منتهي $\sum_{i\in I} m_i$ حيث $(m_i) \in M_i$ و هذه الكتابة وحيدة.

مبرهنة (دون برهان) لتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات الجزئية من المودول M
عندها الشروط الاتية متكافئة:

١) $\sum_{i\in I \text{ منتهي}} M_i$ مجموع مباشر داخلي للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$.

٢) اذا كان $m_i \in M_i : \sum_{i\in I \text{ منتهي}} m_i = 0$ عندها $\forall i \in I \ : \ m_i = 0$

٣) $\left(\sum_{\substack{i\in I \text{ منتهي} \\ i\neq j}} M_i\right) \cap M_j = O$ (المودول الصفري) وذلك أيّاً كان j من I.

ملاحظة: ليكن M مودول على A و M_1 و M_2 مودولات جزئية من M عندئذٍ فإنَّ:

$$M = M_1 \oplus M_2 \Leftrightarrow m = \underbrace{m_1}_{\in M_1} + \underbrace{m_2}_{\in M_2} \ : \ \forall m \in M$$ و هذه الكتابة وحيدة $\Leftrightarrow$

$$M = M_1 + M_2 \text{ و } M_1 \cap M_2 = O$$

مبرهنة: لتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات على A ، وليكن N مودول على A ، عندئذٍ يوجد تماثلين زمريين:

$$(1)\quad Hom_A\left(N, \prod_{i\in I} M_i\right) \cong \prod_{i\in I} Hom_A(N, M_i)$$

$$(2)\quad Hom_A\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right) \cong \prod_{i\in I} Hom_A(M_i, N)$$

البرهان

لنأخذ العلاقة (1): ولنبني العلاقة

$$\delta : \quad Hom_A\left(N, \prod_{i\in I} M_i\right) \to \prod_{i\in I} Hom_A(N, M_i)$$

$$f \to \delta(f) = \left(\Pr_i o\, f\right)_{i\in I}$$

- إنَّ δ تطبيق لأنَّ:

$$\forall\, f_1, f_2 \in Hom_A\left(N, \prod_{i\in I} M_i\right) \ ; \ f_1 = f_2$$

$$\Pr_i o\, f_1 = \Pr_i o\, f_2 \underset{\text{تساوت المركبات المتقابلة } i\in I}{\Rightarrow} \left(\Pr_i o\, f_1\right)_{i\in I} = \left(\Pr_i o\, f_2\right)_{i\in I} \ ; \ \forall i \in I$$

$$\Rightarrow \delta(f_1) = \delta(f_2)$$

- إنَّ δ تشاكل زمري (لذلك سنكتفي بشرط واحد) لأنَّ:

$$\delta(f_1+f_2) \overset{\text{حسب قاعدة الربط}}{\cong} \left(\Pr_i o\,(f_1+f_2)\right)_{i\in I} \overset{\Pr_i \text{ تشاكل}}{\cong} \left(\Pr_i o\, f_1\right)_{i\in I} + \left(\Pr_i o\, f_2\right)_{i\in I}$$

$$= \delta(f_1) + \delta(f_2)$$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "g_i"] \arrow[dr, dotted, "h"'] & M_i \\ & \prod_{i\in I} M_i \arrow[u, "\Pr_i"'] \end{tikzcd}$$

- إنَّ δ تقابل لأنَّ: ليكن $\forall (g_i)_{i\in I} \in Hom_A(N, M_i)$ عنصر كيفي من المستقر حيث $i \in I$: $g_i : N \to M_i$ تشاكل لكن $(\prod_{i\in I} M_i , \{Pr\}_{i\in I})$ تشكل جداء للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ وذلك حسب مبرهنة سابقة إذاً يوجد تشاكل وحيد :

$h : N \to \prod_{i\in I} M_i$ بحيث

$\Pr_i o\, h = g_i \ ; \ \forall\, i \in I$ ولكن $\delta(h) = (\Pr_i o\, h)_{i\in I} = (g_i)_{i\in I}$ أي يوجد h عنصر وحيد من المنطلق بحيث $\delta(h) = (g_i)_{i\in I}$ وبالتالي (1) تماثل زمري .

ملاحظة : لاثبات أن تطبيق ما غامر نأخذ عنصر كيفي من المستقر ونجد عنصر من المنطلق صورته هي العنصر الكيفي ولكن اذا كان هذا العنصر وحيد فبذلك يكون قد تم اثبات انه متباين وغامر أي تقابل.

أما إثبات (2) فهو وظيفة ...

انتهت المحاضرة

حل وظيفة المحاضرة السابقة

مبرهنة : أي جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ يماثل $(\bigoplus_{i\in I} M_i, \{in_i\}_{i\in I})$.

البرهان

لنفرض $(C, \{f_i\}_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ ولنبرهن أن : $\bigoplus_{i\in I} M_i \cong C$

عندئذ بما أن $(\bigoplus_{i\in I} M_i, \{in_i\}_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$

فإنه عندئذ يوجد تشاكل وحيد $\exists!\ h : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow C$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "in_i"] \arrow[d, "f_i"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[dl, dotted, "h"] \\ C & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "in_i"'] & C \arrow[dl, dotted, "k"] \\ \bigoplus_{i\in I} M_i & \end{tikzcd}$$

بحيث $\forall\, i \in I \ : \ h \circ in_i = f_i$

وكذلك لدينا $(C, \{g_i\}_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$

عندئذ يوجد تشاكل وحيد: $\exists!\ k : C \ \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$

بحيث $\forall\, i \in I \quad k \circ f_i = in_i$

أصبح لدينا $\bigoplus_{i\in I} M_i \underset{h}{\overset{k}{\leftrightarrows}} C$ ولدينا $\forall i \in I$: $h \circ in_i = f_i \ , \ k \circ f_i = in_i$

ولدينا $f_i = h \circ in_i = h \circ (k \circ f_i) = (h \circ k) \circ f_i$

$f_i = Id \circ f_i$ لكن h, k وحيدين بحيث ماسبق محقق اذاً $h \circ k = Id$

ومن جهة أخرى :

ولدينا $in_i = k \circ f_i = k \circ (h \circ in_i) = (k \circ h) \circ in_i$

$in_i = Id \circ in_i$ لكن h, k وحيدين بحيث ماسبق محقق اذاً $k \circ h = Id$

إذاً h تقابل و $h^{-1} = k$ وهو تشاكل $\Leftarrow h$ تماثل ومنه $\bigoplus_{i\in I} M_i \ \cong C$.

انتهى الحل

لولا وجود عكس المعنى لما وجد للمعنى معنى ...

لولا وجود الحزن لما وجد للفرح معنى ...

لولا وجود الفشل لما وجد للنجاح معنى ...

إعداد: لبنى الطون – احمد أبو التوت – شهد الحايك البوشي