◄دكتورة المادة: نور غازي

◄المحاضرة : العاشرة   عنوان المحاضرة: الجداء والجداء المرافق

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-برهان الطلب الثاني من المبرهنة السابقة .

٢ـ الجداء الديكارتي للمودولات.

سنكمل في هذه المحاضرة برهان المبرهنة التي في المحاضرة السابقة وسنبرهن الطلب الثاني منها :
أي اثبات أن المتتالية

$$* \quad 0 \to Hom\,(M'',N) \xrightarrow{g^*} Hom(M,N) \xrightarrow{f^*} Hom(M',N) \dots (2)$$

هي متتالية تامة.

٢) يجب أن نبرهن أن : ١) g^* متباين , ٢) $Img^* = kerf^*$

- إن g^* متباين لأن :

ليكن $u \in kerg^*$ عندئذ $u \in Hom(M'',N)$ و $g^*(u) = 0$ ومنه $\overbrace{u \circ g = 0}^{@}$
حيث 0 هو التشاكل الصفري .ولكي يتم المطلوب يجب أن نبرهن أن $u = 0$

بما أن g غامر لان * تامة فإنه:

$$m'' \in M'' \Longrightarrow \exists\, m \in M \;\; ; g(m) = m''$$

وبما أن $Hom(M'',N)$ $u \in$ فإن :

$$u\big(g(m)\big) = u(m'') \Rightarrow u \circ g(m) = u(m'') \Rightarrow \overbrace{0(m)}^{@ \text{ حسب}} = u(m'')$$

وبالتالي نجد: $u(m'') = 0$ ومنه $u = 0$ أي أن $kerg^* = 0$ إذا g^* متباين .

أو نطبق نتيجة بما أن g غامر فهو قابل للاختصار من اليمين لكن يجب إثبات صحتها أثناء البرهان .

- لنثبت الآن أن : $Img^* = kerf^*$

ليكن $u \in Img^*$ عندئذ : $u \in Hom(M,N)$ وبالتالي حسب تعريف الصورة المباشرة:

$$\exists\, v \in Hom(M'',N):\ g^*(v) = v \circ g = u$$

لنبرهن ان $f^*(u) = 0 \Leftrightarrow u \in kerf^*$

ولدينا $(g \circ f) = 0$: كون المتتالية تامة و تركيب التطبيقات تجميعي فيكون

$$f^*(u) = u \circ f = (v \circ g) \circ f = v \circ (g \circ f) = v \circ 0 = 0$$

ومنه : $u \in \mathrm{kerf}^*$ ومنه $Img^* \subseteq kerf^*$

لنثبت الاحتواء المعاكس: لتكن $u \in kerf^*$ عندئذ $u \in Hom(M,N)$ حيث $f^*(u) = uof = 0$

ومنه $keru \underbrace{\subseteq}_{\text{حسب مبرهنة سابقة}} Imf \underbrace{=}_{\text{لان المتتالية تامة}} kerg$ **(١)**

والمطلوب اثبات أن $u \in Img^*$ أي أنه $\exists\, w \in Hom(M'',N):\ g^*(w) = wog = u$

لنبني العلاقة w بحيث يكون المخطط تبديلي :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & M'' \arrow[dl, dotted, "w"] \\ N & \end{tikzcd}$$

$$w : M'' \longrightarrow N$$

$$m'' \to w(m'') = u(m) \quad : g(m) = m''$$

$$\forall\, m_1'', m_2'' \in M''\ ;\ \forall\, \varphi, \beta \in A$$

إن w تطبيق لأن : $m_1'' = m_2''$ بما أن g غامر فإنه

$$\exists\, m_1, m_2 \in M \ : g(m_1) = m_1'' \ , \qquad g(m_2) = m_2''$$

لدينا $m_1'' = m_2'' \Leftarrow g(m_1) = g(m_2)$

$$\Rightarrow g(m_1) - g(m_2) \underbrace{=}_{g \text{ تشاكل}} g(m_1 - m_2) = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 \in kerg$$

وحسب **(١)** فإنه $m_1 - m_2 \in kerg \subseteq keru$

$$\Rightarrow u(m_1 - m_2) = 0 \xrightarrow{u \text{ تشاكل}} u(m_1) = u(m_2)$$

w حسب قاعدة ربط $\Rightarrow w(m_1'') = w(m_2'')$

إن w تشاكل (وظيفة).

لنتأكد من كون المخطط تبديلي لنثبت أن : $g^*(w) = u \Rightarrow w \circ g = u$

$$\forall m \in M \quad : w \circ g(m) = w(g(m)) \underbrace{=}_{w \text{ من طريقة بناء}} w(m'') = u(m)$$

$$\Longrightarrow\ w\circ g(m)=u(m)\ \ \Longrightarrow\ w\circ g=u$$

ومنه نجد أنه تم اثبات وجود تشاكل w من M'' الى N بحيث يحقق $w\circ g=u$ وبالتالي $u\in Img^*$

ومنه $kerf^*\subseteq Img^* \Longleftarrow kerf^*=Img^*$ وبذلك يتم المطلوب ومنه المتتالية تامة .

ملاحظة : لم يتم اثبات أن المتتالية (2) تامة عند الحد $Hom(M',N)$ لأنه لم يخرج منه سهم.

الجداء الديكارتي للمودولات

تعريف : لتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات على الحلقة A عندها لتكن $\prod_{i\in I}M_i$ الجداء الديكارتي لهذه الاسرة $\prod_{i\in I}M_i=\{(m_i)_{i\in I}:m_i\in M_i\}$

لنزود المجموعة $\prod_{i\in I}M_i$ بقانوني التشكيل:الأول داخلي$(+)$ والثاني خارجي $(.)$ مجموعة مؤثراته A.

$$\forall (m_i)_{i\in I},(m'_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}M_i,\lambda\in A$$

$$+\ :\quad (m_i)_{i\in I}+(m'_i)_{i\in I}=(m_i+m_i')_{i\in I}$$

$$.\ :\ \lambda(m_i)_{i\in I}=(\lambda m_i)_{i\in I}$$

إن $(\prod_{i\in I}M_i\ ,+,.)$ تشكل مودول على A والحيادي فيها (0_{M_i}) (وظيفة).

ويسمى مودول الجداء الديكارتي للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$.

تشاكل الإسقاط القانوني

لنعرف العلاقة التالية : لأجل كل $j\in I$ ونعرف ما يلي :

$$Pr_j\ :\prod_{i\in I}M_i\longrightarrow M_j$$

$$(m_i)_{i\in I}\longrightarrow Pr_j(m_i)_{i\in I}=m_j$$

نجد أن العلاقة Pr_j تشاكل مودولي غامر يسمى تشاكل الإسقاط القانوني على المركبة j وذلك $\forall j\in I$ و m_j هو العنصر الموجود في المركبة j .

مثال : ((لتابع الإسقاط)) :

$$\prod_{i\in I}M_i=M_1\times M_2\times M_3\quad :\ i=1,2,3$$

بالاسقاط على المركبة الاولى : $\forall a,\beta \in A$

$$Pr_1 \ : M_1 \times M_2 \times M_3 \ \longrightarrow M_1$$
$$(m_1, m_2, m_3) \to m_1$$

ذكرنا أن هذه العلاقة هي تشاكل مودولي غامر لنثبتها (واضح أنها تطبيق وسنثبت انها تشاكل غامر).

$$\begin{aligned} &Pr_1\big(a(m_1,m_2,m_3)+\beta(m'_1,m'_2,m'_3)\big) \\ &= Pr_1\big(am_1+\beta m'_1, am_2+\beta m'_2, am_3+\beta m'_3\big) = am_1+\beta m'_1 \\ &= aPr_1(m_1,m_2,m_3)+\beta Pr_1(m'_1,m'_2,m'_3) \end{aligned}$$

ولنثبت الان انه غامر ليكن $m_1 \in M_1$ وبالتالي $\exists (m_1,0,0) \quad : \quad Pr_1(m_1,0,0) = m_1$

أي انه غامر ومنه تم المطلوب

بالاسقاط على المركبة الثانية

$$Pr_2 \ : M_1 \times M_2 \times M_3 \ \longrightarrow M_2$$
$$(m_1, m_2, m_3) \to m_2$$

بالاسقاط على المركبة الثالثة

$$Pr_3 \ : M_1 \times M_2 \times M_3 \ \longrightarrow M_3$$
$$(m_1, m_2, m_3) \to m_3$$

جداء المودولات

لتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات على الحلقة A ولتكن الثنائية $(P,\{g_i\}_{i\in I})$ حيث P مودول على الحلقة A وليكن $g_i : P \to M_i$ تشاكل مودولي وذلك $\forall i \in I$ عندئذ نقول عن هذه الثنئية انها جداء للاسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ اذا تحقق مايلي :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g_i"] & M_i \\ & N \arrow[ul, dotted, "h"] \arrow[u, "f_i"'] \end{tikzcd}$$

لأجل كل $(N,\{f_i\}_{i\in I})$ حيث N مودول على A و $f_i : N \longrightarrow M_i$

تشاكلات مودولية $\forall i \in I$ فإنه يوجد تشاكل وحيد $h : N \longrightarrow P$

بحيث يجعل المخطط تبديلي $\forall i \in I \ : g_i \circ h = f_i$

مبرهنة : لتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات على الحلقة A إن $\left(\prod_{i\in I} M_i \ ,\{\mathrm{Pr}_i\}_{i\in I}\right)$ تشكل جداء للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$.

البرهان :

$$\begin{tikzcd} \prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[r, "Pr_i"] & M_i \\ & N \arrow[u, "f_i"'] \arrow[ul, dotted, "h"] \end{tikzcd}$$

نريد أنها جداء أي لنبرهن تحقق الشرط الوارد في التعريف السابق

لتكن $(N,\{f_i\}_{i\in I})$ حيث N مودول على A و $f_i : N \longrightarrow M_i$ تشاكلات مودولية $\forall i \in I$ ولنبحث عن h بحيث يجعل المخطط تبديلي

لنعرف العلاقة : $h : N \ \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$

$$n \ \longrightarrow h(n) = \big(f_i(n)\big)_{i\in I}$$

h تطبيق لأن :

$$\forall\, n_1 \,, n_2 \ \in N : n_1 = n_2$$

$$\forall i \in I \ : f_i(n_1) = f_i(n_2)$$

$$\big(f_i(n_1)\big)_{i\in I} = \big(f_i(n_2)\big)_{i\in I}$$

$$h(n_1) = h(n_2)$$

h تشاكل مودولي (وظيفة) .

h يحقق أن المخطط تبديلي لأن :

$$Pr_i \circ h(n) = Pr_i\big(h(n)\big) = Pr_i\big(f_i(n)\big)_{i\in I} = f_i(n) \quad \forall i \in I \,, \forall n \in N$$

$$\Longrightarrow Pr_i \circ h = f_i \ \ ; \quad \forall i \in I$$

h وحيد لأن : لنفرض وجود : $k : N \ \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$

بحيث $Pr_i \circ k = f_i$ و $\forall i \in I$: إن

$$f_i = Pr_i \circ k = Pr_i \circ h \qquad \forall i \in I \,, \forall n \in N$$

$$Pr_i \circ k(n) = Pr_i \circ h(n)$$

$$\forall i \in I \quad : \quad Pr_i \underbrace{(k(n))}_{k(n) \text{ المركبة } i \text{ للعنصر}} = Pr_i \underbrace{(h(n))}_{h(n) \text{ المركبة } i \text{ للعنصر}}$$

تساوت المركبات المتقابلة للعنصرين $k(n)$ و $h(n)$ إذاً: $h = k$

أي h وحيد ومنه إن $\left(\prod_{i\in I} M_i \ ,\{\mathrm{Pr}_i\}_{i\in I}\right)$ تشكل جداء للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$.

انتهت المحاضرة

تجري الرياح كما تجري سفينتنا نحن الرياح ونحن البحر والسفن

إن الذي يرتجي شيئا بهمته يلقاه لــــو حــاربته الإنس والجن

فاقصد إلى قمم الأشياء تدركها تجري الرياح كما رادت لها السفن

إعداد: لبنى الطون – احمد أبو التوت – شهد الحايك البوشي