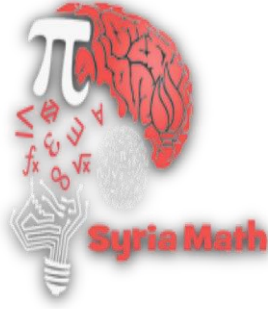


◀ دكتوراة المادة: نور غازي

عنوان المحاضرة: الجداء والجداء المرافق

◀ المحاضرة: العاشرة



المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- برهان الطلب الثاني من المبرهنة السابقة .

٢- الجداء الديكارتي للمودولات.

سنكمل في هذه المحاضرة برهان المبرهنة التي في المحاضرة السابقة وسنبرهن الطلب الثاني منها :
أي اثبات أن المتتالية

$$* \quad 0 \rightarrow \text{Hom}(M'', N) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(M', N) \dots (2)$$

هي متتالية تامة.

$$\text{Img}^* = \text{ker}f^* \quad (٢, ١) \text{ متباين } g^*$$

- إن g^* متباين لأن :

ليكن $u \in \text{ker}g^*$ عندئذ $u \in \text{Hom}(M'', N)$ و $g^*(u) = 0$ ومنه $\overbrace{u \circ g}^@ = 0$ حيث 0 هو التشاكل الصفري. ولكي يتم المطلوب يجب أن نبرهن أن $u = 0$
بما أن g غامر لان $*$ تامة فإنه:

$$m'' \in M'' \Rightarrow \exists m \in M ; g(m) = m''$$

وبما أن $u \in \text{Hom}(M'', N)$ فإن :

$$u(g(m)) = u(m'') \Rightarrow u \circ g(m) = u(m'') \Rightarrow \overbrace{0(m)}^@ = u(m'')$$

وبالتالي نجد: $u(m'') = 0$ ومنه $u = 0$ أي أن $\text{ker}g^* = 0$ إذا g^* متباين .

أو نطبق نتيجة بما أن g غامر فهو قابل للاختصار من اليمين لكن يجب إثبات صحتها أثناء البرهان .

$$- \text{ لنثبت الآن أن : } \text{Img}^* = \text{ker}f^*$$

ليكن $u \in \text{Img}^*$ عندئذ : $u \in \text{Hom}(M, N)$ وبالتالي حسب تعريف الصورة المباشرة:

$$\exists v \in \text{Hom}(M'', N) : g^*(v) = v \circ g = u$$

لنبرهن ان $f^*(u) = 0 \Leftrightarrow u \in \text{ker} f^*$

ولدينا $(g \circ f) = 0$ كون المتتالية تامة و تركيب التطبيقات تجميعي فيكون

$$f^*(u) = u \circ f = (v \circ g) \circ f = v \circ (g \circ f) = v \circ 0 = 0$$

ومنه : $u \in \text{ker} f^*$ ومنه $\text{Im} g^* \subseteq \text{ker} f^*$

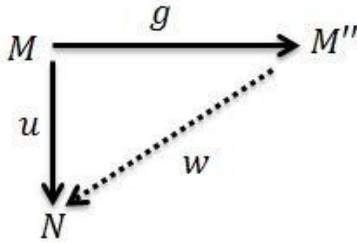
لنثبت الاحتواء المعاكس: لتكن $u \in \text{ker} f^*$ عندئذ $u \in \text{Hom}(M, N)$ حيث $f^*(u) = u \circ f = 0$

$$\text{ومنه } \text{ker} g \stackrel{(1)}{=} \text{Im} f \subseteq \text{ker} u$$

حسب مبرهنة سابقة لان المتتالية تامة

والمطلوب اثبات أن $u \in \text{Im} g^*$ أي أنه $\exists w \in \text{Hom}(M'', N) : g^*(w) = w \circ g = u$

لنبنى العلاقة w بحيث يكون المخطط تبديلي :



$$w : M'' \rightarrow N$$

$$m'' \rightarrow w(m'') = u(m) : g(m) = m''$$

$$\forall m''_1, m''_2 \in M'' ; \forall \varphi, \beta \in A$$

إن w تطبيق لأن : $m''_1 = m''_2$ بما أن g غامر فإنه

$$\exists m_1, m_2 \in M : g(m_1) = m''_1, \quad g(m_2) = m''_2$$

$$g(m_1) = g(m_2) \Leftrightarrow m''_1 = m''_2 \text{ لدينا}$$

$$\Rightarrow g(m_1) - g(m_2) \stackrel{g \text{ تشاكل}}{=} g(m_1 - m_2) = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 \in \text{ker} g$$

وحسب (1) فإنه $m_1 - m_2 \in \text{ker} g \subseteq \text{ker} u$

$$\Rightarrow u(m_1 - m_2) = 0 \xrightarrow{u \text{ تشاكل}} u(m_1) = u(m_2)$$

$$w \text{ حسب قاعدة ربط } \Rightarrow w(m''_1) = w(m''_2)$$

إن w تشاكل (وظيفة).

لنتأكد من كون المخطط تبديلي لنثبت أن : $g^*(w) = u \Rightarrow w \circ g = u$

$$\forall m \in M : w \circ g(m) = w(g(m)) \stackrel{w}{=} w(m'') = u(m)$$

من طريقة بناء w

$$\Rightarrow w \circ g(m) = u(m) \Rightarrow w \circ g = u$$

ومنه نجد أنه تم اثبات وجود تشاكل w من M'' الى N بحيث يحقق $w \circ g = u$ وبالتالي $u \in \text{Im} g^*$

ومنه $\ker f^* = \text{Im} g^* \Leftarrow \ker f^* \subseteq \text{Im} g^*$ وبذلك يتم المطلوب ومنه المتتالية تامة .

ملاحظة : لم يتم اثبات أن المتتالية (2) تامة عند الحد $\text{Hom}(M', N)$ لأنه لم يخرج منه سهم.

الجداء الديكارتي للمودولات

تعريف : لتكن $\{M_i\}_{i \in I}$ أسرة من المودولات على الحلقة A عندها لتكن $\prod_{i \in I} M_i$ الجداء الديكارتي لهذه

$$\prod_{i \in I} M_i = \{ (m_i)_{i \in I} : m_i \in M_i \}$$

الأسرة $\prod_{i \in I} M_i$ بقانوني التشكيل: الأول داخلي (+) والثاني خارجي (.) مجموعة مؤثراته A .

$$\forall (m_i)_{i \in I}, (m'_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i, \lambda \in A$$

$$+ : (m_i)_{i \in I} + (m'_i)_{i \in I} = (m_i + m'_i)_{i \in I}$$

$$\cdot : \lambda(m_i)_{i \in I} = (\lambda m_i)_{i \in I}$$

إن $(\prod_{i \in I} M_i, +, \cdot)$ تشكل مودول على A والحيادي فيها (0_{M_i}) (وظيفة).

ويسمى مودول الجداء الديكارتي للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$.

تشاكل الإسقاط القانوني

لنعرف العلاقة التالية : لأجل كل $j \in I$ ونعرف ما يلي :

$$Pr_j : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$$

$$(m_i)_{i \in I} \rightarrow Pr_j(m_i)_{i \in I} = m_j$$

نجد أن العلاقة Pr_j تشاكل مودولي غامر يسمى تشاكل الإسقاط القانوني على المركبة j وذلك $\forall j \in I$

و m_j هو العنصر الموجود في المركبة j .

مثال : ((لتابع الإسقاط)) :

$$\prod_{i \in I} M_i = M_1 \times M_2 \times M_3 \quad : \quad i = 1, 2, 3$$

بالاسقاط على المركبة الاولى : $\forall a, \beta \in A$

$$Pr_1 : M_1 \times M_2 \times M_3 \rightarrow M_1$$

$$(m_1, m_2, m_3) \rightarrow m_1$$

ذكرنا أن هذه العلاقة هي تشاكل مودولي غامر لنثبتها (واضح أنها تطبيق وسنثبت انها تشاكل غامر).

$$\begin{aligned} & Pr_1(a(m_1, m_2, m_3) + \beta(m'_1, m'_2, m'_3)) \\ &= Pr_1(am_1 + \beta m'_1, am_2 + \beta m'_2, am_3 + \beta m'_3) = am_1 + \beta m'_1 \\ &= aPr_1(m_1, m_2, m_3) + \beta Pr_1(m'_1, m'_2, m'_3) \end{aligned}$$

ولنثبت الان انه غامر ليكن $m_1 \in M_1$ وبالتالي $\exists(m_1, 0, 0) : Pr_1(m_1, 0, 0) = m_1$

أي انه غامر ومنه تم المطلوب

بالاسقاط على المركبة الثانية

$$Pr_2 : M_1 \times M_2 \times M_3 \rightarrow M_2$$

$$(m_1, m_2, m_3) \rightarrow m_2$$

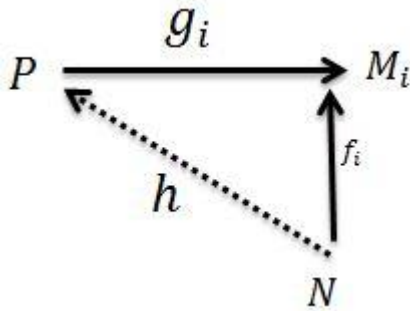
بالاسقاط على المركبة الثالثة

$$Pr_3 : M_1 \times M_2 \times M_3 \rightarrow M_3$$

$$(m_1, m_2, m_3) \rightarrow m_3$$

جاء المودولات

لتكن أسرة من المودولات على الحلقة A ولتكن الثنائية $(P, \{g_i\}_{i \in I})$ حيث P مودول على الحلقة A وليكن $g_i: P \rightarrow M_i$ تشاكل مودولي وذلك $\forall i \in I$ عندئذ نقول عن هذه الثنائية انها جداء للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$ اذا تحقق مايلي :



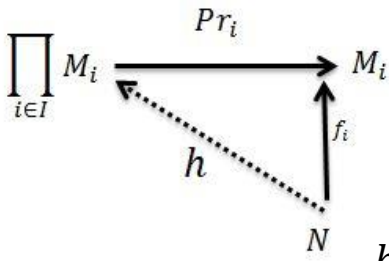
لأجل كل $(N, \{f_i\}_{i \in I})$ حيث N مودول على A و $f_i : N \rightarrow M_i$

تشاكلات مودولية $\forall i \in I$ فإنه يوجد تشاكل وحيد $h : N \rightarrow P$

بحيث يجعل المخطط تبديلي $\forall i \in I : g_i \circ h = f_i$

مبرهنة: لتكن $\{M_i\}_{i \in I}$ أسرة من المودولات على الحلقة A إن $(\prod_{i \in I} M_i, \{Pr_i\}_{i \in I})$ تشكل جداء للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$.

البرهان :



نريد أنها جداء أي لنبرهن تحقق الشرط الوارد في التعريف السابق

لتكن $(N, \{f_i\}_{i \in I})$ حيث N مودول على A و $f_i : N \rightarrow M_i$ تشاكلات مودولية $\forall i \in I$ ولنبحث عن h بحيث يجعل المخطط تبديلي

لنعرف العلاقة :

$$h : N \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$$

$$n \rightarrow h(n) = (f_i(n))_{i \in I}$$

h تطبيق لأن :

$$\forall n_1, n_2 \in N : n_1 = n_2$$

$$\forall i \in I : f_i(n_1) = f_i(n_2)$$

$$(f_i(n_1))_{i \in I} = (f_i(n_2))_{i \in I}$$

$$h(n_1) = h(n_2)$$

h تشاكل مودولي (وظيفة) .

h يحقق أن المخطط تبديلي لأن :

$$Pr_i \circ h(n) = Pr_i(h(n)) = Pr_i(f_i(n))_{i \in I} = f_i(n) \quad \forall i \in I, \forall n \in N$$

$$\Rightarrow Pr_i \circ h = f_i ; \quad \forall i \in I$$

$$k : N \rightarrow \prod_{i \in I} M_i \quad : \text{ h وحيد لأن : لنفرض وجود :}$$

بحيث $Pr_i \circ k = f_i$ و $\forall i \in I$ إن :

$$f_i = Pr_i \circ k = Pr_i \circ h \quad \forall i \in I, \forall n \in N$$

$$Pr_i \circ k(n) = Pr_i \circ h(n)$$

$$\forall i \in I : Pr_i \left(\underbrace{k(n)}_{\text{المركبة } i \text{ للعنصر } k(n)} \right) = Pr_i \left(\underbrace{h(n)}_{\text{المركبة } i \text{ للعنصر } h(n)} \right)$$

تساوت المركبات المتقابلة للعنصرين $k(n)$ و $h(n)$ إذاً $h = k$:

أي h وحيد ومنه إن $(\prod_{i \in I} M_i, \{Pr_i\}_{i \in I})$ تشكل جداء للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$.

أشبهت العاصفة

تجري الرياح كما تجري سفينتنا نحن الرياح ونحن البحر والسفن

إن الذي يرتجى شيئاً بهمه يلقاه لو حاربته الإنس والجن

فاقصد إلى قوم الأشياء تدركها تجري الرياح كما رادت لها السفن

إعداد: لبنى الطون - احمد أبو النوت - شهد الحايك البوشي