◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄ المحاضرة التاسعة   عنوان المحاضرة : تتمة خواص الاستقلال العشوائي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- تتمة خواص الاستقلال العشوائي

2- تعريف الاستقلال الشرطي

3- بعض الأمثلة

سوف نكمل خواص الاستقلال العشوائي:

2) إن Ω و $\emptyset$ حدثان مستقلان عن أي حدث $A \in F$ يحقق : $0 < P(A) < 1$

البرهان

$$\begin{cases} P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 \\ P(A).P(\emptyset) = 0 \end{cases} \Rightarrow P(A \cap \emptyset) = P(A).P(\emptyset)$$

إذاً A و $\emptyset$ مستقلان احتمالياً

$$\begin{cases} P(A \cap \Omega) = P(A) \\ P(A).P(\Omega) = P(A) \times 1 = P(A) \end{cases} \Rightarrow P(A \cap \Omega) = P(A).P(\Omega)$$

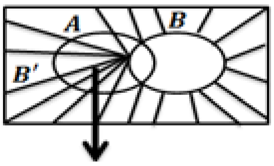
إذاً A و Ω مستقلان احتمالياً

3) إذا كان A, B حدثين مستقلين عشوائياً من F فإنَّ :

أ- A و B' مستقلان .
ب- A' و B مستقلان .
ت- A' و B' مستقلان .

◄ **البرهان :**

أ) $$P(A \cap B') = \underbrace{P(A(A \cap B))}_{\text{حسب خواص الاحتمال}} = \underbrace{P(A) - P(A \cap B)}_{\text{حسب خواص الاحتمال}} = \underbrace{P(A) - P(A \cap B)}_{A,B \text{ مستقلان}}$$



$A \backslash B = A \cap B' = A \backslash (A \cap B)$

$$\Rightarrow P(A \cap B') = P(A) - P(A).P(B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B') = P(A)[1 - P(B)] = P(A).P(B')$$

ومنه مستقلان A و B' .

ب) $P(A' \cap B) = P(B/(A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A).P(B)$

$$\Rightarrow P(A' \cap B) = P(B)[1 - P(A)] = P(B).P(A')$$

ومنه A و B' مستقلان .

ت) $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$

$$\Rightarrow P(A' \cap B') = [1 - P(A)] - P(B) + P(A).P(B) = P(A') - P(B)[1 - P(A)]$$

$$\Rightarrow P(A' \cap B') = P(A') - P(B).P(A') = P(A')[1 - P(B)] = P(A').P(B')$$

ومنه A' و B' مستقلان .

4) إذا كانت $(A_i)_{1 \le i \le n}$ متتالية من أحداث F مستقلة عشوائياً فإنَّ الحوادث المتممة لها $(A'_i)_{1 \le i \le n}$ تكون مستقلة أيضاً .

5) لتكن $(A_i)_{i \ge 1}$ متتالية الأحداث المتنافية مثنى مثنى وإذا كانت الأحداث B و A_i مستقلة عشوائياً من أجل كل $i \ge 1$, عندئذٍ يكون الحدثان B و $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ مستقلين عشوائياً .

الإثبات

$$P\big(B \cap (\cup_{i \ge 1} A_i)\big) = P(\cup_{i \ge 1}(B \cap A_i))$$

وبسبب تنافي الأحداث A_i ينتج أنَّ $(B \cap A_i)_{i \ge 1}$ أيضاً أحداث متنافية وحسب مبرهنة سابقة أنَّ :

$$P\big(B \cap (\cup_{i \ge 1} A_i)\big) = P(\cup_{i \ge 1}(B \cap A_i)) = \textstyle\sum_{i \ge 1} P(B \cap A_i)$$

ولكون B و A_i مستقلة من أجل كل i :

$$\Rightarrow P\big(B \cap (\cup_{i \ge 1} A_i)\big) = \textstyle\sum_{i \ge 1} P(B \cap A_i)$$

$$\Rightarrow P\big(B \cap (\cup_{i \ge 1} A_i)\big) = \textstyle\sum_{i \ge 1} P(B).P(A_i) = P(B)\sum_{i \ge 1} P(A_i)$$

ولكون $(A_i)_{i \ge 1}$ أحداث متنافية , فإنَّ :

$$P\big(B \cap (\cup_{i \ge 1} A_i)\big) = P(B)\textstyle\sum_{i \ge 1} P(A_i) = P(B).P(\cup_{i \ge 1} A_i)$$

وبالتالي الحدثين مستقلين عشوائياً .

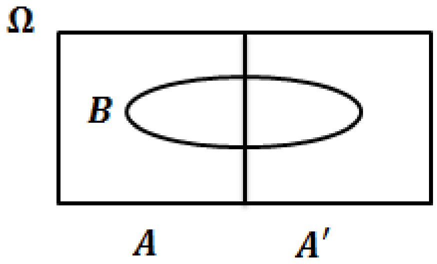
6) من أجل B, A حدثين من F ويحققان الشرط : $P_A(B) = P_{A'}(B)$, عندئذٍ يكون : B, A مستقلين عشوائياً .

البرهان يمكن كتابة $B = (B \cap A) \cup (B \cap A')$ حيث : $B \cap A' , B \cap A$ حدثان متنافيان

فحسب قاعدة الاحتمال المركب يكون :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$

$$\Rightarrow P(B) = P(A).P_A(B) + P(A').P_{A'}(B)$$



ولدينا فرضاً : $P_A(B) = P_{A'}(B)$ ومنه :

$$P(B) = P(A).P_A(B) + P(A').P_A(B)$$

$$\Rightarrow P(B) = P_A(B)[P(A) + P(A')]$$

$$\Rightarrow P(B) = P_A(B)[1] = P_A(B)$$

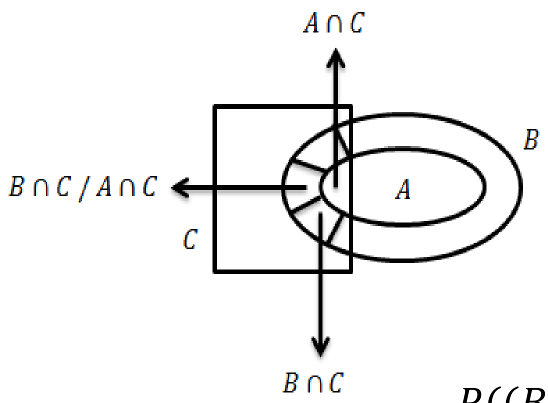
ومنه A, B مستقلان .

7) بفرض C و B و A أحداث مستقلة من F وبفرض $A \subseteq B$ وكذلك A و C مستقلان عشوائياً وأيضاً B و C مستقلان عشوائياً , عندئذٍ يكون C و B/A مستقلين .

الإثبات

$$(B/A) \cap C = [(B \cap C) \,/\, (A \cap C)]$$

$$\mathrm{P((B/A) \cap C) = P}[(B \cap C)/(A \cap C)] = P(B \cap C) - P(A \cap C)$$



وبسبب استقلال كل من C و B و A فإنَّ:

$$P\big((B\backslash A) \cap C\big) = P(B).P(C) - P(A).P(C)$$

$$\Rightarrow P\big((B\backslash A) \cap C\big) = P(C)[P(B) - P(A)]$$

ولكون $\mathrm{A \subseteq B}$:

$$P((B/A) \cap C) = P(C)[P(B) - P(A) = P(C).P(B/A)]$$

وبالتالي B/A و C مستقلين.

8) يكون الصفان F_1, F_2 مستقلين عشوائياً إذا كان كل حدث من F_1 مستقلاً عن كل حدث من F_2 .

فمثلاً إذا كان A, B حدثان مستقلان من أجل : $F_1 = \{\emptyset, \Omega, A, A'\}$ جبر تام على A

$F_2 = \{\emptyset, \Omega, B, B'\}$ جبر تام على B فإنَّ : F_1, F_2 جبران مستقلان عشوائياً إذا كان B و A مستقلان.

9) إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \dots, A_n$ مستقلة عشوائياً فعندئذٍ يكون :

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\cup_{i=1}^{n} A_i)' = 1 - P(\cap_{i=1}^{n} A_i')$$

ولكون A_i مستقلة فإنَّ A_i' مستقلة أيضاً:

$$\boxed{\Rightarrow P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\cap_{i=1}^{n} A_i') = 1 - \prod_{i=1}^{n}[P(A_i')]}$$

تعريف خاصية الاستقلال الشرطي

نقول عن حدثين $A, B \in F$ أنهما مستقلان شرطياً بالنسبة للحدث $C \in F$ إذا تحقق :

$$P_C(A \cap B) = P_C(A).P_C(B)$$

◄**ملاحظة** من الممكن أن يكون الحدثان A, B مستقلان عشوائياً و غير مستقلان شرطياً بالنسبة للحدث C .

البرهان نأخذ $C = A \cap B$ وبالتالي $P_C(A \cap B) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)}$

$$\frac{P(A\cap B)}{P(C)} = \frac{P(A).P(B)}{P(C)} = P(A)\frac{P(B)}{P(C)} = P(A).\frac{P(B\cap C)}{P(C)}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(C)} = P(A).P_C(B) \neq P_C(A).P_C(B)$$

أي أنَّ A, B غير مستقلين شرطين بالنسبة للحدث C .

مثال (1) إذا كان احتمال أن يعيش رجل 10 سنوات أخرى هو $\frac{1}{4}$ واحتمال أن تعيش زوجته 10 سنوات أخرى هو $\frac{1}{3}$, والمطلوب :

1) احسب احتمال أن يعيش الاثنان 10 سنوات أخرى .
2) احسب احتمال أن يعيش أحدهما على الأقل 10 سنوات أخرى .
3) احسب احتمال أن يتوفى الاثنان خلال 10 سنوات أخرى .
4) احسب احتمال أن تعيش الزوجة فقط 10 سنوات أخرى .

الحل

1) بفرض A الحدث الدال على أنَّ الرجل يعيش 10 سنوات أخرى , و B الحدث الدال على أنَّ الزوجة تعيش 10 سنوات أخرى فيكون الحدث المطلوب هو : $A \cap B$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

2) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

3) $$P(A' \cap B') = P(A').P(B') = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

4) $$P(A' \cap B) = P(A').P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

طريقة ثانية لحل (4) : $$P(B/A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

مثال (2) إذا كان احتمال أن يصيب A الهدف 0.25 واحتمال أن يصيب B الهدف 0.40 فإذا صوب كل من A و B نحو الهدف مرو واحدة , والمطلوب عين احتمال :

- إصابة هدف .
- عدم إصابة الهدف .
- إصابة الهدف من واحد فقط .

الحل

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B)$

$$P(A \cup B) = 0.25 + 0.40 - (0.25)(0.40) = 0.65 - 0.10 = 0.55$$

- $P(A' \cap B') = P(A').P(B') = (0.75)(0.60) = 0.45 = 1 - P(A \cup B)$
- $P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] = ?$ ولكونهما حدثان متنافيان :

$$P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] = P(A).P(B') + P(A').P(B)$$

$$\Rightarrow P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] = (0.25)(0.66) + (0.75)(0.40) = 0.15 + 0.3 = 0.45$$

انتهت المحاضرة

الأمل هو الشيء الوحيد الذي يغلب الخوف , الأمل هو اليأس من اليأس

إعداد: منى شغل**إيناس دليل**نور مهرة