نظري

◄ دكتورة المادة: جمال مللي

◄ المحاضرة: العاشرة      عنوان المحاضرة: الفضاءات التامة

**المحتوى العلمي** : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ اثبات الفضاء $\ell^{\infty}$ و $\ell^{p}$ هو فضاء تام

بسم الله الرحمن الرحيم

سنتابع في محاضرتنا اليوم درس براهين التمام لبعض الفضاءات المترية ، فنلاحظ أننا نعتمد في براهيننا على تمام الفضاء $\mathbb{R}$أو$\mathbb{C}$ بالنسبة للمترك المعرف عليها و هو المألوف كما نلاحظ أننا في هذه البراهين نتبع نفس الخطوات حيث أننا نختار كوشية من هذا الفضاء ونثبت تقاربها في الفضاء نفسه عندئذٍ يكون الفضاء تاماً بالنسبة للمترك المعرف عليها.

## والأن لنبرهن تمام الفضاء $\ell^{\infty}$ :

- **الفضاء $\ell^{\infty}$ :** تذكرة (هو فضاء جميع المتتاليات المحدودة من الأعداد العقدية أو الحقيقة )

بداية لنعرف على هذا الفضاء المترك المحدد بالمساواة التالية :

$$d(x,y)=\sup|\xi_i-\eta_i| \;\; ; \forall x,y\in\ell^{\infty} : x=(\xi_i),y=(\eta_i)$$

لنأخذ المتتالية $(x_m)$ من هذا الفضاء بحيث يكون كوشية وبالتالي فهي تحقق ما يلي:

$$x_m=(\xi_i^m)=(\xi_1^m,\xi_2^m,\dots\dots,\xi_r^m,\dots\dots);|\xi_i^m|\le C_{x_m}\in\mathbb{R}$$

$$\forall\varepsilon>0\,;\,\exists N_0\in N\,;\,\mathrm{m,n}\ge N_0 : d(x_m\,,x_n)<\varepsilon\Rightarrow\sup|\xi_i^m-\xi_i^n|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow|\xi_i^m-\xi_i^n|<\varepsilon\,;\forall i\ge1$$

(وذلك لأنه الـsup لمقادير غير سالبة أصغر من $\varepsilon$ فإن كل من هذا المقادير سيكون أصغر من $\varepsilon$)

أي أنه تحقق لدينا : $\forall i=1,2,\dots$ $\quad \forall\varepsilon>0\,;\,\exists N_0\in N\,;\,\mathrm{m,n}\ge N_0 \;\;;|\xi_i^m-\xi_i^n|<\varepsilon$

أي أنه من أجل كل $i$ فإن $(\xi_i^m)$ هي عبارة عن متتاليات كوشية عددية عقّدية أو حقيقة وبما أن الفضاء $\mathbb{C}$ و$\mathbb{R}$ تاماً فإن كل من هذه الكوشيات ستكون متقاربة أي $(*)$ $\quad \xi_i^m\to\xi_i \;\;\Leftrightarrow\;\; |\xi_i^m-\xi_i|<\varepsilon$

وللتوضيح لنأخذ مجموعة من المتتاليات من الفضاء $l^{\infty}$ وسنرى ما يلي :

$$x_1 : \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots \dots \dots \dots \xi_r^{(1)} \dots \dots$$

$$x_2 : \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots \dots \dots \dots \xi_r^{(2)} \dots \dots$$

$$x_3 : \xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}, \dots \dots \dots \dots \xi_r^{(3)} \dots \dots$$

$$\vdots$$

$$x_m : \xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots \dots \dots \dots \xi_r^{(m)} \dots \dots$$

$$\vdots$$

$$x_n : \xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots \dots \dots \dots \xi_r^{(n)} \dots \dots$$

نلاحظ انه من أجل كل i لدينا عمود عبارة عن متتالية كوشية متقاربة اي من اجل $i = 1$

لدينا $(\xi_1^{(m)})$ متقاربة من $\xi_1$ و هكذا

وبالتالي من أجل كل $i \geq 1$ تشكل لدينا المتتالية التالية

$$x = (\xi_i) = (\xi_1, \xi_2, \dots \dots, \xi_r, \dots .)$$

والأن لنبرهن أن المتتالية $(x_m)$ سوف تتقارب من $x$ ، لنثبت أولاً أن العنصر $x \in l^\infty$ :

إن $x$ هي متتالية من الاعداد العقدية أو الحقيقية . وأن:

لدينا $\forall i \geq 1 \,; |\xi_i| = |-\xi_i| = |\underbrace{\xi_i^{(m)}}_{\text{اضفنا}} - \xi_i - \underbrace{\xi_i^{(m)}}_{\text{طرحنا}}| \leq \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i\right| + \left|\xi_i^{(m)}\right|$

$\left|\xi_i^{(m)} - \xi_i\right| < \varepsilon$ حسب $(*)$ بالاعتماد على التقارب

$\left|\xi_i^{(m)}\right|$ أصغر من $C_{x_m}$ حسب تعريف الفضاء $l^\infty$ (( حيث $C_{x_m} \in R$ ))

باختيار $\varepsilon = 1$ يكون لدينا : $|\xi_i| \leq 1 + C_{x_m} = C_x \in \mathbb{R}$ و هذا يعني أن $x \in l^\infty$

بقي علينا إثبات أن $(x_m)$ متقاربة من $(x)$.

لدينا حسب العلاقة $(1)$ ويجعل $n \to \infty$ نجد :

$$\Longrightarrow = \sup \left| \xi_i - \underbrace{\lim_{n \to \infty} \xi_i^{(n)}}_{\text{كونها كوشية متقاربة } \xi_i} \right| = \underbrace{\sup \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i\right|}_{d(x_m, x) \text{ و هذا هو}} \leq \varepsilon$$

اي تحقق لدينا :

$$\forall \delta = 2\varepsilon \,; \exists\, N_0 \in N \,; m \geq N_0 \;\; ; \sup\left|\xi_i^{(m)} - \xi_i\right| \leq \varepsilon < \delta ; \;\delta = 2\varepsilon$$

وبالتالي فإن $(x_m)$ متقاربة من $(x)$.

أي أن كل متتالية كوشية في الفضاء $l^\infty$ هي متتالية متقاربة فيه وبالتالي.

فإن $l^\infty$ فضاء تام على المترك المعرف عليه .

- **الفضاء $\mathbf{l^p}$ :** ((هو فضاء المتتاليات الذي يتميز بأن المتسلسلات الناتجة منها متقاربة )).

لنعرف على الفضاء المترك التالي :

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\ ;x=(\xi_i)\ ,y=(\eta_i)\in l^p$$

للإثبات أن هذا الفضاء هو تام نأخذ متتالية كوشية اختيارية ونثبت تقاربها في هذا الفضاء.

لنأخذ المتتالية $(x_m)\in l^p$ بحيث تكون من نمط كوشي عندئذ.

$$x_m=(\xi_1^{(m)},\xi_2^{(m)},\dots\dots\dots\xi_r^{(m)},\dots\dots)$$

كون المتتالية كوشية فهي تحقق التعريف:

$$\forall\varepsilon>0\ ;\ \exists N_0\in N\ ;\ \mathrm{m,n}\geq N_0;d(x_n,x_m)<\varepsilon\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon\quad(١)$$

برفع الطرفين للقوة $p$ $\quad\sum_{i=1}^{\infty}\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}\right|^p<\varepsilon^p$

كون هنا المجموع هو لمقادير غير سالبة متقارب ولا يتجاوز $\varepsilon^p$ فإن كل مكون من مكونات هذا المجموع أيضاً سيكون أصغر من $\varepsilon^p$ أي تحقق لدينا.

$$\forall\varepsilon>0\ ;\ \exists N_0\in N\ ;\ \mathrm{m,n}\geq N_0\quad;\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}\right|^p<\varepsilon^p\qquad i=1,2,3,\dots..$$

$$\forall\varepsilon>0\ ;\ \exists N_0\in N\ ;\ \mathrm{m,n}\geq N_0\ \Rightarrow\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}\right|<\varepsilon\qquad i=1,2,3,\dots..$$

وهذا هو تعريف المتتالية الكوشية أي أن $(\xi_i^{(m)})$ حيث $(i\geq 1$مثبت$)$ هي متتالية عددية عقدية أو حقيقية كوشية وكون $\mathbb{C}$ و $\mathbb{R}$فضاء تام فإن $(\xi_i^{(m)})$ متقاربة من أي $\xi_i$

$$\lim_{m\to\infty}\xi_i^m=\xi_i\qquad\Leftrightarrow\qquad\xi_i^m\xrightarrow[m\to\infty]{}\xi_i\qquad i=1,2,3,\dots..$$

وجدنا : $d(x_m, x_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}\right|^p < \varepsilon^p$

نلاحظ أن المتسلسلة في العلاقة (١) متقاربة حسب تعريف $l^{\infty}$ وبالتالي المجموع محدود، فإذا أخذنا مجموع جزئي من هذا المجموع يبقى أيضاً محدود ولذلك اخترنا عدد صحيح k من الحدود لنستطيع أخذ نهاية إذن أصبح لدينا

$$\sum_{i=1}^{k} \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}\right|^p < \varepsilon^p$$

بجعل $n \longrightarrow \infty$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \left|\xi_i^{(m)} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)}}_{\xi_i \text{ كونها كوشية متقاربة من}}\right|^p \le \varepsilon^p \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i\right|^p \le \varepsilon^p$$

بجعل $k \longrightarrow \infty$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i\right|^p \le \varepsilon^p$$

هذا يبين ان $x_m - x \in l^p$ وبما ان $x_m \in l^p$ فحسب متباينة منكوفسكي فإن:

$$x = \underbrace{x_m}_{\in l^p} + \underbrace{(x - x_m)}_{\in l^p} \in l^p \qquad (\text{أضفنا وطرحنا } x_m)$$

لدينا:

$$\left(d(x_m, x)\right)^p = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i\right|^p \le \varepsilon^p$$

وبالتالي تحقق لدينا تعريف التقارب

$$\forall \delta = 2\varepsilon > 0\,;\ \exists N_0 \in N\,;\ \mathrm{m} \ge N_0; d(x_m, x) \le \varepsilon < 2\varepsilon = \delta$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \delta$$

ومنه الفضاء $l^p$ تام بخصوص المترك المعرف عليه.

**انتهت المحاضرة**

إعداد: غفران الريابي – عبد الرحمن البحش – سماح علوان