نظري

◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة: السادسة عشر ◄ عنوان المحاضرة : زمرة التماثلات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-مبرهنات.

٢- أحد الشروط التي لاجلها دوماً يوجد تماثل للزمرة Z_n.

تمهيدية:

لتكن G زمرة ان المجموعة $Inn(G) = \{Ta: a \in G\}$ تشكل زمرة جزئية في الزمرة $Aut(G)$.

البرهان:

واضح أن: $\emptyset \neq Inn(G) \in Aut(G)$

- لنبرهن أولاً على أن $\forall a \in G \ : \ T^{-1}a = Ta^{-1}$
- ليكن $a \in G$ لما كان Ta تماثل للزمرة G
- فإن: $Ta \in Aut(G)$ ومنه يوجد مقلوب لهذا العنصر ينتمي لنفس الزمرة أي : $T^{-1}a \in Aut(G)$ ومن خواصه :

$$Ta.T^{-1}a = Te = I_G$$

$$\forall x \in G\,; (Ta.T^{-1}a)(x) = I_G(x) = x$$

$$,Ta\big(T^{-1}a(x)\big) = x$$

$$\Rightarrow a.T^{-1}a(x)a^{-1} = x$$

$$\Rightarrow T_a^{-1}(x) = a^{-1}.x.(a^{-1})^{-1} = Ta^{-1}(x)$$

ومنه $T^{-1}a = Ta^{-1}$.

- لنبرهن ثانياً أن $Ta.T^{-1}b \in Inn(G)$
- ليكن $Ta.T \quad b \in Inn(G)$ حيث $a, b \in G$

$$\forall x \in G \ ; \ (Ta.T^{-1}b)(x) = Ta\left(T_b^{-1}(x)\right)$$

$$= Ta\left(T_{b^{-1}}(x)\right) = Ta(b^{-1}.x.b)$$

$$= a(b^{-1}.x.b)a^{-1} = (a.b^{-1})x(b.a^{-1}) = T_{a.b^{-1}}(x)$$

ولما كان $a.b^{-1} \in G$ فإن $T_{a.b^{-1}} \in Inn(G)$ ومنه $T_a.T_b^{-1} = T_{a.b^{-1}} \in Inn(G)$

ومنه فإن : $Inn(G)$ زمرة جزئية في زمرة التماثلات $Aut(G)$

مبرهنة:

لتكن G زمرة عندئذٍ :

١- الزمرة الجزئية $Inn(G)$ ناظمية في $Aut(G)$.

٢- $G/Z(G) \cong Inn(G)$

البرهان

١- لنبرهن على ان $\forall f \in Aut(G)$ فإن $f.Inn(G)f^{-1} \subseteq Inn(G)$

- ليكن $\varphi \in f.Inn(G)f^{-1}$ عندئذٍ يوجد $T_a \in Inn(G): a \in G$ يحقق:

$$\varphi = f.T_a.f^{-1}$$

ان φ تماثل للزمرة G.

$$\forall x \in G; \varphi(x) = (f.T_a.f^{-1})(x) = f(T_a(f^{-1}(x)))$$

$f^{-1}(x)$ مقلوب العنصر f و هو تشاكل منطلقه G ومستقره G

$$\Rightarrow f(T_a(f^{-1}(x))) = f(a.f^{-1}(x).a^{-1})$$

$$= f(a).(x)(f(a^{-1}))$$

$$= T_{f(a)}(x) : f(a) \in G$$

ومنه $\varphi = T_{f(a)} \in Inn(G)$

و هذا يبين ان الزمرة الجزئية $Inn(G)$ ناظمية في $Aut(G)$

٢) لنعرف العلاقة : $\mu: G \longrightarrow Inn(G)$

بالشكل : $\forall a \in G \,; \mu(a) = T_a$

إن μ تطبيق لأن : $\forall a,b \in G : a = b \,; a^{-1} = b^{-1}$

وبالتالي : $\forall x \in G; ax = bx \Rightarrow a.x.a^{-1} = b.x.b^{-1}$

$$\Rightarrow T_a(x) = T_b(x) \Rightarrow T_a = T_b$$

$$\Rightarrow \mu(a) = \mu(b)$$

إن μ تشاكل لأن : $\forall x \in G \,; \mu(a.b) = T_{a.b}$

إن $T_{a.b}(x) = (a.b)(x)(a.b)^{-1}$

$$= (a.b)(x)(b^{-1}.a^{-1}) = a(b.x.b^{-1})a^{-1}$$

$$T_a(b.x.b^{-1}) = T_a\big(T_b(x)\big) = T_a.T_b(x)$$

$$\Rightarrow T_{a.b} = Ta.Tb$$

$$\Rightarrow \mu(a.b) = \mu(a).\mu(b)$$

μ غامر لأن : $\forall c \in Inn(G); c \in G \Rightarrow \mu(c) = T_c$

اصبح لدينا تشاكل زمري غامر وحسب مبرهنة التماثل الأولى $\frac{G}{ker(\mu)} \cong Inn(G)$

- لنبرهن ان $ker(\mu) = Z(G)$

$$= \{a \;: a \in G \,, ax = xa : x \in G\}$$

- ليكن $a \in ker(\mu)$ عندئذٍ $\mu(a) = I_G \;,\; \mu(a) = T_a \Rightarrow T_a = I_G$

$$\Rightarrow T_a(x) = I(x) \;\; \forall x \in G$$

$$\Rightarrow a.x.a^{-1} = x \Rightarrow ax = x$$

$$\Rightarrow a \in Z(G)$$

$$\Rightarrow ker(\mu) \subseteq Z(G)$$

- ليكن $b \in Z(G)$ عندئذٍ : $\forall x \in G\,; bx = xb \;\Rightarrow b.x.b^{-1} = x$
- $\Rightarrow T_b(x) = I(x)$

$$\Rightarrow \mu(b) = T_b = I_G \Rightarrow b \in ker(\mu)$$

$$\Rightarrow Z(G) \subseteq ker(\mu) \Rightarrow Z(G) = ker(\mu)$$

- احد الشروط التي لأجلها دوماً يوجد تماثل للزمرة Z_n

مبرهنة : ليكن $n > 1$ عدد صحيح ولأجل كل $0 < r < n$

ويحقق $gcd(n,r) = 1$ يوجد تماثل للزمرة Z_n.

الاثبات :

ليكن $0 < r < n$ عدد صحيح يحقق $gcd(r,n) = 1$

ولنعرف العلاقة :

$$\varphi : Z_n \to Z_n$$

بالشكل الاتي : $\varphi(k) = r.k\; mod - n \in Z_n$ فإن $\forall\, k \in Z_n$

إن φ تطبيق لأنه $\forall\; k_1 , k_2 \in Z_n \;,\; k_1 = k_2\,; r.k_1 = r.k_2$

$$\Rightarrow r.k_1\; mod - n = r.k_2\; mod - n$$

$$\Rightarrow \varphi(k_1) = \varphi(k_2)$$

أن φ متباين لان :

$$\forall \varphi(k_1) = \varphi(k_2)$$

$$\Rightarrow r.k_1.mod - n = r.k_2.mod - n$$

ومنه: $rk_1 = q_1.n + \lambda \;,\; rk_2 = q_2.n + \lambda$

حيث $0 \leq \lambda < n$ و $\lambda, q_1, q_2 \in Z$ وبالتالي :

$$r(k_1 - k_2) = (q_1 - q_2)\,n \quad (*)$$

لنفرض جدلا أن $k_1 \neq k_2$

لدينا من جهة أخرى: $gcd(n,r) = 1$ فإنه يوجد $s,t \in Z$ بحيث

$$1 = rt + sn$$

نضرب$(*)$ بـ s نجد :

$$sr(k_1 - k_2) = (q_1 - q_2)ns$$

$$= (q_1 - q_2)(1 - rt \quad)$$

$$\Rightarrow sr(k_1 - k_2)$$

$$= (q_1 - q_2) - (q_1 - q_2)rt$$

$$\Rightarrow sr(k_1 - k_2) + rt(q_1 - q_2) = (q_1 - q_2)$$

$$\Rightarrow r\left[\underbrace{s(k_1 - k_2) + t(q_1 - q_2)}_{d}\right] = (q_1 - q_2)$$

$$\Rightarrow r.d = q_1 - q_2$$

$$\Rightarrow r.d.n = (q_1 - q_2)n$$

نعوض في $(*)$ نجد :

$$r.d.n = r(k_1 - k_2) \Rightarrow d.n = k_1 - k_2$$

وهذا يبين ان $k_1 - k_2 \geq n$

من جهى أخرى لدينا $k_1 - k_2 < n$ وهذا غير ممكن ومنه : $k_1 = k_2$ و φ متباين.

φ غامر:

لانه تطبيق متباين ، المنطلق والمستقر له نفسهُ وهو مجموعة منتهية.

φ تشاكل لأن :

$$\varphi(k_1 + k_2) = \varphi(k_1) + \varphi(k_2)$$

ان

$$\varphi(k_1 + k_2) = r(k_1 + k_2)mod - n$$

$$= (rk_1 + rk_2)mod - n$$

$$= rk_1 mod - n + rk_2 mod - n$$

$$= \varphi(k_1) + \varphi(k_2)$$

ومنه فإن φ تماثل في الزمرة G.

إذا كنت تُريد أن تكون في القمة ، وأن تغير العالم، ابدأ من نفسك أولاً ولا تتبع التقليد الأعمى..

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا همج