نظري

◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄المحاضرة السابعة   عنوان المحاضرة : الاحتمال الشرطي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- الاحتمال الشرطي ، قاعدة الاحتمال المركب

٢- تعريف التجزئة ، نتائج عن التجزئة

٣- دستور بايز (قانون السبب)

الاحتمال الشرطي

ليكن (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً وليكن A, B حدثين من F فإذا علمنا أنّ $P(A) \geq 0$ فإننا نعرّف الاحتمال الشرطي لوقوع B علماً أنّ A قد وقع ب :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

نتيجة

$$P_A(B) = \frac{\frac{|A \cap B|}{|A|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|A|}$$

مبرهنة : إذا كان (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً وكان $A \in F$ بحيث $P(A) > 0$ فإنَّ الاحتمال المشروط ب A : P_A يكون احتمالاً على F ، والفضاء (Ω, F, P_A) فضاءً احتمالياً مشروطاً ب A.

◄**البرهان** : لنبرهن أنَّ $P_A : F \to \mathbb{R}$ تحقق شروط كولموغوروف للاحتمال أي :

- $\forall B \in F \ : \ P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

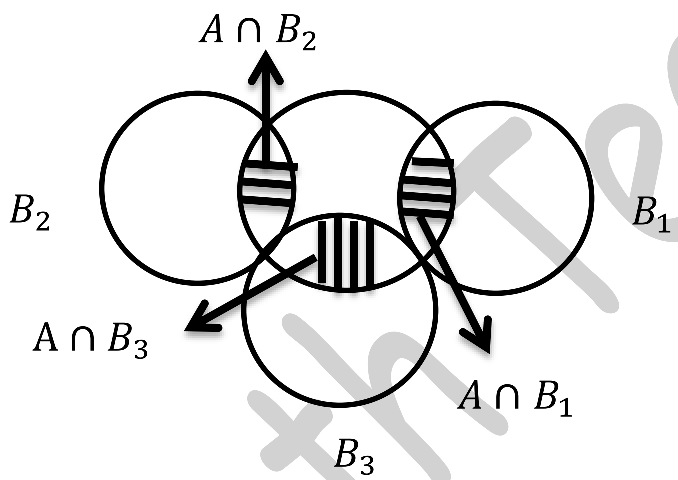
لأنَّ : $P(A) > 0 \ , \ P(A \cap B) \geq 0$

Syria Math Team

- $$P_A(\Omega) = \frac{P(A\cap\Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$
- من أجل متتالية معدودة من الحوادث المتنافية مثنى مثنى $(B_i)_{i\geq 1}$ ، لدينا :

$$P_A(\cup_{i\geq 1} B_i) = \frac{P(A\cap(\cup_{i\geq 1} B_i))}{P(A)} = \frac{P(\cup_{i\geq 1}(A\cap B_i))}{P(A)}$$

لكون $(B_i)_{i\geq 1}$ متنافية مثنى مثنى فإنَّ $(A \cap B_i)$ متنافية مثنى مثنى :



$$\Rightarrow \quad P_A(\cup_i B_i) = \frac{\sum_{i\geq 1} P(A\cap B_i)}{P(A)} = \sum_{i\geq 1} \frac{P(A\cap B_i)}{P(A)} = \sum_{i\geq 1} P_A(B_i)$$

أي أن الشروط الثلاثة لكولموغوروف محققة وبالتالي P_A هو احتمال على F

◄ **نتيجة:** بما أن P_A هو دالة احتمال فإنه يحقق كل الخواص التي تحققها دالة الاحتمال **مثالاً:**

$$P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$$

مثال صنفنا 100 شخص وفقاً للجنس (ذكر ، أنثى) ووفقاً للإصابة بمرض معين ، (مصاب ،غير مصاب) وكانت لدينا النتائج التالية :

	مصاب	غير مصاب	المجموع
ذكر	2	58	60
أنثى	1	39	40
المجموع	3	97	100

اخترنا عشوائياً شخصاً واحداً ، والمطلوب :

١) إذا علمنا أن الشخص الذي تم اختياره كان ذكراً فما هو احتمال أن يكون مصاباً ؟

٢) إذا علمنا أن الشخص الذي تم اختياره كان مصاباً فما هو احتمال أن يكون ذكراً ؟.

الحل

بفرض A الحدث الدال على أن الشخص مصاب و B الحدث الدال على أن الشخص ذكر ، عندئذٍ :

- الحدث المطلوب هو : $P_B(A) = ?$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30} \cong 0.03$$

- الحدث المطلوب هو : $P_A(B) = ?$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3} \cong 0.6$$

💜 قاعة الاحتمال المركب 💜

نستنتج من التعريف للاحتمال الشرطي ، حيث لدينا :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P_A(B).P(A)$$

ولدينا أيضاً :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P_B(A).P(B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P_A(B).P(A) = P_B(A).P(B) \ldots (*)$$

ويمكن تعميم هذه الغلاقة من أجل متتالية الأحداث $(A_i)_{1<i\leq n}$:

$$\boxed{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1).P_{A_1}(A_2).P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{\cap_{i=1}^{n-1} A_i}(A_n)}$$

Syria Math Team

مثال صندوق يحوي n كرة زرقاء و $m \geq 2$ كرة سوداء ، سحبنا على التتالي كرتين وبدون إعادة ، عين احتمال الحصول على كرتين سوداوين .

الحل: بفرض A الحدث الدال على أنَّ الكرة الأولى سوداء و B الحدث الدال على أنَّ الكرة الثانية سوداء فيكون الحدث المطلوب هو : $A \cap B$ ، وبالتالي حسب قاعدة الاحتمال المركّب :

$$P(A \cap B) = P(A).P_A(B) = \frac{C_1^m}{C_1^{m+n}} \cdot \frac{C_1^{m-1}}{C_1^{m+n-1}} = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m-1}{m+n-1}$$

$$= \frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}$$

... تعريف التجزئة ...

ليكن (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً ، و $(A_i)_{i\geq 1}$ أحداث من F نقول عن $(A_i)_{i\geq 1}$ إنّها تشكّل تجزئة لفضاء العينة Ω إذا تحققت الشروط :

١) $A_i \neq \emptyset \;;\; i \geq 1$

٢) $A_i \cap A_j = \emptyset \;;\; i \neq j$

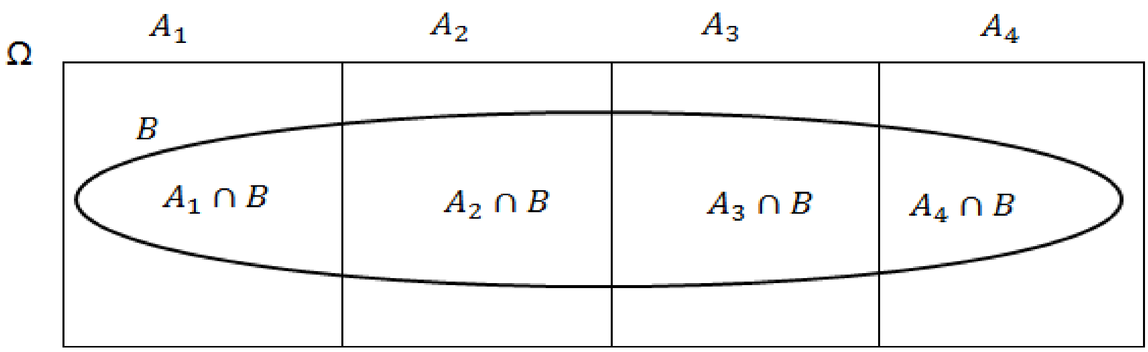
٣) $\bigcup_{i\geq 1} A_i = \Omega$

نتائج التجزئة : بفرض أن $(A_i)_{i\geq 1}$ تشكل تجزئة للحدث الأكيد Ω ((حيث A_i متتالية من أحداث F)) فإن

- $P(\bigcup_{i\geq 1} A_i) = \sum_{i\geq 1} P(A_i) = P(\Omega) = 1$ وذلك كون $(A_i)_{i\geq 1}$ متنافية مثنى مثنى وندعو

العلاقة : $\sum_{i\geq 1} P(A_i) = 1$ **(بقاعدة الاحتمال الكلي)**

- إنَّ أي تجزئة للحدث الأكيد Ω تؤدي إلى تجزئة لأي حدث متعلق بالتجزئة ذاتها ، فإذا كانت
- $(A_i)_{i\geq 1}$ تجزئة ل Ω وكان B حدثاً متعلقاً بالتجزئة ذاتها فإن $(B \cap A_i)_{i\geq 1}$ تشكل تجزئة ل B



أي أنَّ : $B = B \cap \Omega = B \cap (\cup_{i\geq 1} A_i) = \cup_{i\geq 1}(B \cap A_i)$ وكون $(A_i)_{i\geq 1}$ متنافية مثنى مثنى فإنَّ $B \cap A_i$ متنافية أيضاً ومنه :

$$\boxed{P(B) = P\left(\bigcup_{i\geq 1}(B \cap A_i)\right) = \sum_{i\geq 1} P(B \cap A_i)}$$

وبالتالي $(B \cap A_i)$ تشكّل تجزئة ل B المرتبط ب Ω وباستخدام قاعدة الاحتمال المركب يمكن كتابة :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P_{A_i}(B)$$

دستور بايز(قانون السبب)

لتكن $(A_i)_{i\geq 1}$ تجزئة ل Ω في الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) وليكن B حدثاً مرتبطاً بهذه التجربة فإن دستور بايز ينص على أنَّ :

$$P_B(A_i) = \underbrace{\frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}}_{\text{حسب الاحتمال مشروط}} = \underbrace{\frac{P(A_i).P_{A_i}(B)}{\sum_{i\geq 1} P(A_i).P_{A_i}(B)}}_{\text{حسب قاعدة الاحتمال المركب}}$$

أي أنّه أذا وقع B فما احتمال أن يكون الجزء (A_i) هو السبب في وقوعه .

الإثبات

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i).P_{A_i}(B)}{\sum_{i\geq 1} P(B \cap A_i)} = \frac{P(A_i).P_{A_i}(B)}{\sum_{i\geq 1} P(A_i).P_{A_i}(B)}$$

انتهت المحاضرة

"النجاح ليس دوماً عن العظمة بل هو الثبات ، الثبات على العمل الشاق يوصلك للنجاح ، والعظمة تأتي معه "

إعداد: منى شغل**إيناس دليل**نور مهرة