

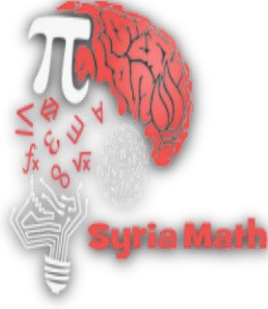
8-11-2017

نظري

◀ دكتورة المادة: نور غازي

عنوان المحاضرة: المجموع المباشر

◀ المحاضرة: الحادية عشرة



المستوى العلمي: أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١- الجداء المرافق

٢- المجموع المباشر لأسرة من المودولات

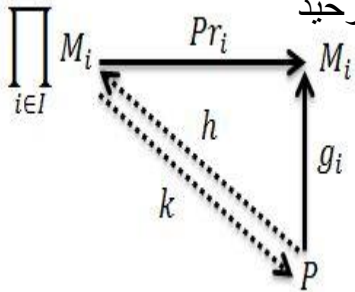
ملاحظة: بمجرد وجود الجداء الديكارتي لأسرة من المودولات نستخدم الاسقاط القانوني .

مبرهنة: أي جداء للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$ يماثل $(\prod_{i \in I} M_i, \{Pr_i\}_{i \in I})$.

البرهان:

لنفرض $(P, \{g_i\}_{i \in I})$ جداء للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$ ولنبرهن أن $\prod_{i \in I} M_i \cong P$

إن $\prod_{i \in I} M_i$ جداء للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$ (حسب مبرهنة سابقة) عندئذ يوجد تشاكل وحيد



$\exists! h : P \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ بحيث $Pr_i \circ h = g_i \quad \forall i \in I$ وكذلك لدينا

$(P, \{g_i\}_{i \in I})$ جداء للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$ عندئذ يوجد تشاكل وحيد:

$\exists! k : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow P$ بحيث $g_i \circ k = Pr_i \quad \forall i \in I$

نريد اثبات أن $\prod_{i \in I} M_i \cong P$ لذلك سنبرهن أن h تماثل (أي هو تشاكل وتقابل) ولدينا h تشاكل

وسنبرهن أنه تقابل أي يوجد له تطبيق عكسي وهو k بحيث $h \circ k = Id \wedge k \circ h = Id$ لدينا

$$g_i = Pr_i \circ h = (g_i \circ k) \circ h = g_i \circ (k \circ h)$$

(ولكن نعلم أن التطبيق المطابق يصور كل عنصر بنفسه وهو تطبيق تقابل و نرمز له ب Id) ولدينا

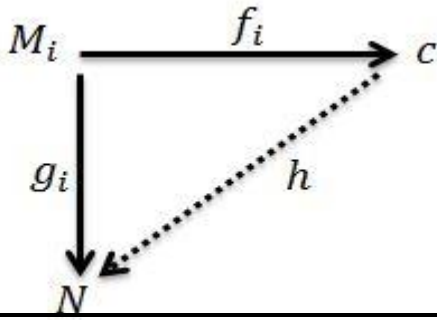
$$k \circ h = Id \text{ لكن } g_i = g_i \circ Id \text{ وحيدتين بحيث ماسبق محقق اذاً } k \circ h = Id$$

ومن جهة أخرى:

$Pr_i = g_i \circ k = (Pr_i \circ h) \circ k = Pr_i \circ (h \circ k) \dots$
 $h \circ k = Id$ اذاً محقق اذاً $Pr_i = Pr_i \circ Id$ لكن h, k وحيدين بحيث ماسبق محقق اذاً
 اذاً h تقابل و $h^{-1} = k$ وهو تشاكل $h \Leftarrow$ تماثل ومنه $\prod_{i \in I} M_i \cong P$.

الجداء المرافق

تعريف: لتكن $\{M_i\}_{i \in I}$ أسرة من المودولات على الحلقة A ولتكن الثنائية $(c, \{f_i\}_{i \in I})$ حيث c مودول على الحلقة A و $f_i : M_i \rightarrow c$ تشاكل مودولي وذلك $\forall i \in I$ عندها نقول عن الثنائية $(c, \{f_i\}_{i \in I})$ أنها جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$ إذا تحقق ما يلي:



لأجل كل $(N, \{g_i\}_{i \in I})$ حيث N مودول على A و $g_i : M_i \rightarrow N$ تشاكل مودولي وذلك $\forall i \in I$ فإنه يوجد تشاكل وحيد $h : c \rightarrow N$ بحيث يجعل المخطط تبديلي يحقق ما يلي: $h \circ f_i = g_i ; \forall i \in I$.

المجموع المباشر لأسرة من المودولات

تعريف: لتكن $\{M_i\}_{i \in I}$ أسرة من المودولات على A ولنعرّف المجموعة $\bigoplus_{i \in I} M_i$ بأنها مجموعة العناصر $(m_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$ بحيث جميع المركبات أصفار بإستثناء عددي منتهي منها .
 إن المجموعة $(\bigoplus_{i \in I} M_i, +, \cdot)$ هي مودول جزئي من $\prod_{i \in I} M_i$.
 يدعى المجموع المباشر للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$.

ملاحظة: ليكن $j \in I$ عندئذ :

$$in_j : M_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$$

$$m_j \rightarrow in_j(m_j) = (m_i)_{i \in I} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ m_j & i = j \end{cases}$$

m_j موجودة في المركبة j .

و in_j هو تشاكل مودولي متباين ويدعى التباين القانوني على المركبة j (الاحتواء القانوني).



ملاحظة :

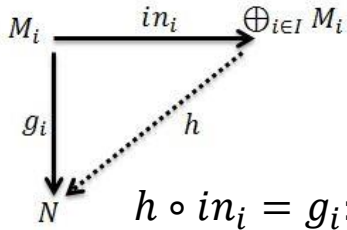
$$(m_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i$$

$$(m_i)_{i \in I} = (\dots, 0, m_i, 0, \dots)$$

لا نبدأ بالصفر لأنه قد يكون $I = \mathbb{Z}$ مثلاً

مبرهنة: لتكن $\{M_i\}_{i \in I}$ أسرة من المودولات على A عندئذ $(\bigoplus_{i \in I} M_i, \{in_i\}_{i \in I})$ تشكل جداء المرافق للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$.

البرهان:



لتكن الثنائية $(N, \{g_i\}_{i \in I})$ حيث N مودول على A و $g_i : M_i \rightarrow N$ لتكن تشاكلات مودولية $(\forall i \in I)$ ولنبرهن على وجود تشاكل وحيد بحيث

يجعل المخطط تبديلي أي لنبرهن $\exists ! h : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow N$ ويحقق $h \circ in_i = g_i : \forall i \in I$

لنعرف العلاقة :

$$h : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow N$$

$$(m_i)_{i \in I} \rightarrow h((m_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I \text{ منتهي}} g_i(m_i)$$

إن المجموع معرف لأنه منتهي لان $(m_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i$

- إن h تطبيق وتشاكل (أثبت ذلك).

- إثبات أن المخطط تبديلي أي $\forall m_i \in M_i, \forall i \in I : h \circ in_i = g_i$

$$h \circ in_i(m_i) = h(in_i(m_i)) = h(\dots, 0, m_i, 0, \dots) = g_i(m_i)$$

التطبيقات متساويين لتساوي المنطق والمستقر وقاعدة الربط

- لنبرهن أن h وحيد :

لنفرض وجود تشاكل $(*) k : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow N$ بحيث $\forall i \in I : g_i = k \circ in_i$

$$h \circ in_i = g_i = k \circ in_i$$

$$\forall m_i \in M_i : h \circ in_i(m_i) = g_i(m_i) = k \circ in_i(m_i)$$

$$h(in_i(m_i)) = k(in_i(m_i))$$

$$k(\dots, 0, m_i, 0, \dots) = h(\dots, 0, m_i, 0, \dots) \quad (1) \quad \text{ومنه نجد :}$$

$$h((m_i)_{i \in I}) = k((m_i)_{i \in I}) \quad \text{لنبرهن أن :}$$

$$\forall (m_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i$$

$$h((m_i)_{i \in I}) = h\left(\sum_{\text{منتهي}} (\dots, 0, m_i, m_{i+1}, \dots, 0, \dots)\right).$$

كون h تشاكل :

$$h((m_i)_{i \in I}) = (h(\dots, 0, m_i, 0, \dots)) + (h(\dots, 0, m_{i+1}, 0, \dots)) + \dots$$

$$\stackrel{\text{حسب 1}}{=} k(\dots, 0, m_i, 0, \dots) + k(\dots, 0, m_{i+1}, 0, \dots) + \dots$$

$$\stackrel{\text{كون } k \text{ تشاكل}}{=} k\left(\sum_{\text{منتهي}} (\dots, 0, m_i, m_{i+1}, \dots, 0, \dots)\right) = k((m_i)_{i \in I})$$

$$\Rightarrow h((m_i)_{i \in I}) = k((m_i)_{i \in I})$$

$$\Rightarrow h = k$$

ومنه h وحيد .

مبرهنة : (وظيفة :) أي جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i \in I}$ يماثل $(\bigoplus_{i \in I} M_i, \{in_i\}_{i \in I})$.

انتهت المحاضرة

عش بالإيمان... عش بالأمل... عش بالحب... عش بالكفاح... وقدر قيمة الحياة

د. ابراهيم الفقي

إعداد: لبنى الطون - احمد أبو النوت - شهد الحايك البوشي