نظري

◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄ المحاضرة : الحادية عشرة عنوان المحاضرة: المجموع المباشر

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ الجداء المرافق

٢ـ المجموع المباشر لأسرة من المودولات

ملاحظة : بمجرد وجود الجداء الديكارتي لأسرة من المودولات نستخدم الاسقاط القانوني .

مبرهنة : أي جداء للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ يماثل $\left(\prod_{i\in I} M_i \ ,\{Pr_i\}_{i\in I}\right)$.

البرهان:

لنفرض $(P,\{g_i\}_{i\in I})$ جداء للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ ولنبرهن أن : $\prod_{i\in I} M_i \ \cong P$

إن $\prod_{i\in I} M_i$ جداء للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ (حسب مبرهنة سابقة) عندئذ يوجد تشاكل وحيد

$\exists!\ h : P \ \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$ بحيث $\forall\, i\in I \quad Pr_i \circ h = g_i$ وكذلك لدينا

$(P,\{g_i\}_{i\in I})$ جداء للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ عندئذ يوجد تشاكل وحيد :

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} M_i \arrow[r, "Pr_i"] \arrow[dr, dashed, shift right, "k"'] & M_i \\
& P \arrow[u, "g_i"'] \arrow[ul, dashed, shift right, "h"']
\end{tikzcd}$$

$\exists!\ k : \prod_{i\in I} M_i \ \longrightarrow P$ بحيث $\forall\, i\in I \quad g_i \circ k = Pr_i$

نريد اثبات أن $\prod_{i\in I} M_i \ \cong P$ لذلك سنبرهن أن h تماثل (أي هو تشاكل وتقابل ولدينا h تشاكل

وسنبرهن أنه تقابل أي يوجد له تطبيق عكسي وهو k بحيث $(\, h\circ k = Id \wedge k\circ h = Id\,)$ لدينا

$$g_i = Pr_i \circ h = (g_i \circ k)\circ h = g_i \circ (k\circ h)$$

(ولكن نعلم أن التطبيق المطابق يصور كلو عنصر بنفسه وهو تطبيق تقابل و نرمز له ب Id) ولدينا

$g_i = g_i \circ Id$ لكن h,k وحيدين بحيث ماسبق محقق اذاً $k\circ h = Id$

ومن جهة أخرى :

ولدينا $Pr_i = g_i \circ k = (Pr_i \circ h) \circ k = Pr_i \circ (h \circ k)$ ....

لكن $Pr_i = Pr_i \circ Id$ و h, k وحيدين بحيث ماسبق محقق اذاً $h \circ k = Id$

إذاً h تقابل و $h^{-1} = k$ وهو تشاكل $\Leftarrow h$ تماثل ومنه $\prod_{i\in I} M_i \cong P$.

الجداء المرافق

تعريف : لتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات على الحلقة A ولتكن الثنائية $(c, \{f_i\}_{i\in I})$ حيث c مودول على الحلقة A و $f_i : M_i \longrightarrow c$ تشاكل مودولي وذلك $\forall\, i \in I$ عندها نقول عن الثنائية $(c, \{f_i\}_{i\in I})$ أنها جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ إذا تحقق ما يلي :

لأجل كل $(N, \{g_i\}_{i\in I})$ حيث N مودول على A و $g_i : M_i \longrightarrow N$ تشاكل مودولي وذلك $\forall\, i \in I$ فإنه يوجد تشاكل وحيد $h : c \longrightarrow N$ بحيث يجعل المخطط تبديلي يحقق ما يلي: $h \circ f_i = g_i \;\; ; \forall\, i \in I$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "g_i"'] & c \arrow[dl, dotted, "h"] \\ N & \end{tikzcd}$$

المجموع المباشر لأسرة من المودولات

تعريف : لتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات على A ولنعرف المجموعة $\bigoplus_{i\in I} M_i$ بأنها مجموعة العناصر $(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ بحيث جميع المركبات أصفار بإستثناء عددي منتهي منها .

إن المجموعة $(\bigoplus_{i\in I} M_i , +, .)$ هي مودول جزئي من $\prod_{i\in I} M_i$.

يدعى المجموع المباشر للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$.

ملاحظة: ليكن $j \in I$ عندئذ :

$$in_j : M_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$$

$$m_j \longrightarrow in_j(m_j) = (m_i)_{i\in I} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ m_j & i = j \end{cases}$$

m_j موجودة في المركبة j .

و in_j هو تشاكل مودولي متباين ويدعى التباين القانوني على المركبة j (الاحتواء القانوني).

ملاحظة :

$$(m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$$
$$(m_i)_{i\in I} = (\dots,0,m_i,0,\dots)$$

لا نبدأ بالصفر لأنه قد يكون $\boldsymbol{I} = \mathbb{Z}$ مثلاً

مبرهنة : لتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات على A عندئذ $\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, \{in_i\}_{i\in I}\right)$ تشكل جداء المرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$.

البرهان:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "in_i"] \arrow[d, "g_i"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[dl, dotted, "h"] \\ N & \end{tikzcd}$$

لتكن الثنائية $(N, \{g_i\}_{i\in I})$ حيث N مودول على A و $g_i : M_i \longrightarrow N$ تشاكلات مودولية $(\forall\, i \in I)$ ولنبرهن على وجود تشاكل وحيد بحيث يجعل المخطط تبديلي أي لنبرهن $\exists!\, h : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$: و يحقق $h \circ in_i = g_i : \forall\, i \in I$

لنعرف العلاقة : $h : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$

$$(m_i)_{i\in I} \longrightarrow h((m_i)_{i\in I}) = \sum_{\text{متنهي } i\in I} g_i(m_i)$$

إن المجموع معرف لأنه منتهي لان $(m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$

- إن h تطبيق وتشاكل (أثبت ذلك).
- إثبات أن المخطط تبديلي أي $h \circ in_i = g_i$: $\forall\, i \in I$, $\forall\, m_i \in M_i$

$$h \circ in_i(m_i) = h\big(in_i(m_i)\big) = h(\dots,0,m_i,0,\dots) = g_i(m_i)$$

التطبيقين متساويين لتساوي المنطلق و المستقر وقاعدة الربط

- لنبرهن أن $\boldsymbol{h}$ **وحيد** :

لنفرض وجود تشاكل $(*)$ $\quad k : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$ بحيث $g_i = k \circ in_i \;:\; \forall i \in I$

$$h \circ in_i = g_i = k \circ in_i$$

$$\forall\, m_i \in M_i \;: h \circ in_i(m_i) = g_i(m_i) = k \circ in_i(m_i)$$

$$h\big(in_i(m_i)\big) = k\big(in_i(m_i)\big)$$

ومنه نجد : $k(\dots,0,m_i,0,\dots) = h(\dots,0,m_i,0,\dots) \quad (1)$

لنبرهن أن : $h((m_i)_{i\in I}) = k((m_i)_{i\in I})$

$$\forall (m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$$

$$h((m_i)_{i\in I}) = h\Big(\sum_{\text{منتهي}}(\dots,0,m_i,m_{i+1},\dots,0,\dots)\Big).$$

كون **h تشاكل :**

$$h((m_i)_{i\in I}) = \big(h(\dots,0,m_i,0,\dots)\big) + \big(h(\dots,0,m_{i+1},0,\dots)\big) + \cdots$$

$$\underbrace{=}_{\text{حسب } 1} k(\dots,0,m_i,0,\dots) + k(\dots,0,m_{i+1},0,\dots) + \cdots$$

$$\underbrace{=}_{\text{كون } k \text{ تشاكل}} k\left(\sum_{\text{منتهي}}(\dots,0,m_i,m_{i+1},\dots,0,\dots)\right) = k((m_i)_{i\in I})$$

$$\Longrightarrow h((m_i)_{i\in I}) = k((m_i)_{i\in I})$$

$$\Longrightarrow h = k$$

ومنه **h وحيد** .

مبرهنة : (وظيفة :) أي جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ يماثل $\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, \{in_i\}_{i\in I}\right)$.

انتهت المحاضرة

عش بالإيمان...عش بالأمل...عش بالحب...عش بالكفاح...وقدر قيمة الحياة

د.ابراهيم الفقي

إعداد: لبنى الطون – احمد أبو التوت – شهد الحايك البوشي