نظري

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄المحاضرة: التاسعة عنوان المحاضرة : الفضاءات التامة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ ـ المتتاليات الجزئية
٢ ـ الفضاء $\mathbb{R}^n$ التام

سنعرف في محاضرتنا على المتتاليات الجزئية وسنذكر بعض المبرهنات المهمة وكذلك سنرى كيفية بناء متتالية جزئية من متتالية أصلية وأخيراً سنثبت تمام الفضاء $\mathbb{R}^n$

المتتاليات الجزئية

تعريف المتتالية الجزئية :

لتكن لدينا $\{x_m\}_{m\in N^*}$ متتالية في $\mathbb{R}^n$ ولتكن $\{m_k\}_{m\in N^*}$ متتالية من الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث $m_1 < m_2 < m_3 \dots \dots \dots ..$

عندئذٍ نسمي $\{x_{m_k}\}$ متتالية جزئية من المتتالية $\{x_m\}_{m\in N^*}$.

- كيفية بناء متتالية جزئية من متتالية أصيلة :

١ـ طريقة تركيب التوابع.

لتكن لدينا x متتالية

$$x: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow x_n$$

أي كل عدد طبيعي يقابله x_n نسميها الحد لعام للمتتالية ، والأن سننتقل من $\mathbb{N}$ إلى $\mathbb{N}$ بدالة متزايدة تماماً إلى $\mathbb{R}$ إذ أن هذا الانتقال يتم بواسطة تركيب التابعين f ، g كما هو موضح .

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$n \to n_k \to x_{n_k}$$

مثال

$$1 \to 1_1$$
$$1_1 \to x_{1_1}$$

٢- الطريقة العملية (ينصح ذكرها كما ذكر الدكتور):

لتكن لدينا المتتالية الحقيقة $\{X_n\}$ حيث بإمكاننا كتابتها بالشكل

$$x_1, x_2, x_3, \dots\dots , x_{n-1}, x_n, \dots$$

-نقوم باختيار عنصر لا على التعين من المتتالية الأصلية x_n ونضعه أول عنصر في المتتالية الجديدة (فإذا اخترنا x_1 نسميه x_{1_1} نعطيه الدليل ١ كونه أول عنصر في المتتالية الجديدة)

-ثم نقوم بحذف هذا العنصر المختار وحذف جميع العناصر الواقعة قبله .

-ثم ننتقل إلى يمين ونختار عنصر أخر (وليكن x_3 ونعطيه الدليل ٢ فيصبح العنصر الثاني في المتتالية الجديدة هو x_{3_2}).

قم نقوم بحذفه وحذف جميع العناصر الواقعة قبله ، نتابع بنفس الأسلوب حيث ان الانتقال إلى يمين في عناصر المتتالية .

وهكذا إذا اخترنا العنصر x_n من المتتالية الأصلية وبفرض أنه أصبح لدينا في المتتالية الاصلية $k-1$ عنصر يكون دليل هذا العنصر الجديد k نسميه x_{n_k}

- إذن نلاحظ أنه تشكل لدينا المتتالية الجزئية $\{x_{n_k}\}$ من المتتالية الأصلية X_n .

ملاحظة : يمكننا تشكيل عدد غير منته من المتتاليات الجزئية . لانه في كلا الطريقتين نلاحظ أن عدد عناصر المتتالية غير منته وكذلك التوابع المتزايدة عددها غير منته .

- **والأن سنورد بعض النظريات المهمة بما يخص المتتاليات الجزئية :**

١- إذا وجد في متتالية ما متتالتين جزئيتين متقاربتين من عنصرين مختلفين فإن المتتالية الاصلية تكون حتماً متباعدة .
٢- إذا كان لدينا متتالية $\{x_n\}$ متقاربة فإن جميع المتتالية الجزئية في هذه المتتالية تكون متقاربة حتماً من نفس العنصر .لكن إذا وجد متتالية جزئية واحدة على الأقل متباعدة فإن المتتالية الأصلية متباعدة .
٣- الشرط اللازم والكافي كي تتقارب متتالية هو أن تتساوى النهاية العليا (أكبر نهايات المتتاليات الجزئية) مع النهاية الدنيا (أدنى نهايات المتتاليات الجزئية)

مثال: لتكن لدينا المتتالية $\{(-1)^n\}$ لنأخذ المتتاليتان الجزئيتان .

تتقارب من-1 $\longrightarrow \{-1,-1,-1,\dots.(-1)^n,\dots.\}$ ، $\{1,1,1,\dots\dots,1^n,\dots.\} \longrightarrow$ تتقارب من1

ونلاحظ أنهما تتقاربان من نهايتين مختلفتين. $\Leftarrow \{(-1)^n\}$ متباعدة .

والآن سننتقل إلى براهين التمام لبعض الفضاءات المترية ومنها $\mathbb{R}^n$:

إثبات تمام الفضاء $\mathbb{R}^n$:

لإثبات أن الفضاء $\mathbb{R}^n$ فضاء تام يجب إثبات أن كل متتالية كوشي في هذا الفضاء هي متتالية متقاربة.

لنأخذ المتتالية $\{x_n\}$ في الفضاء $\mathbb{R}^n$ بحيث تكون هذه المتتالية كوشّية وليكن

حيث: $x_m = \left(\zeta_1^{(m)}, \zeta_2^{(m)}, \dots\dots, \zeta_n^{(m)}\right); \zeta_i^{(m)} \in \mathbb{R}; i = 1,2,3,4, \dots., n$ عنصر من x_n

$x_r = \left(\zeta_1^{(r)}, \zeta_2^{(r)}, \dots\dots, \zeta_n^{(r)}\right); \zeta_i^{(r)} \in \mathbb{R}\,; i = 1,2,3,4, \dots\dots, n$ عنصر من x_n

وذلك لأن أي عنصر من $\{x_n\}$ التي تنتمي إلى $\mathbb{R}^n$ سيكون له n مركبة .

ولنعرف على الفضاء $\mathbb{R}^n$ المترك الاقليدي المعرّف كما يلي :

$$d(x_m, x_r) = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\zeta_i^{(m)} - \zeta_i^{(r)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

كون $\{x_m\}$ كوشية فرضاً فإن :

١- $\forall \varepsilon > 0\,; \exists n_0 \in \mathbb{N}; m, r \geq n_0; d(x_m, x_n) < \varepsilon$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N}; m, r \geq n_0; \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\zeta_i^{(m)} - \zeta_i^{(r)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

$$\xRightarrow{\text{بالتربيع}} \sum_{i=1}^{n}\left(\zeta_i^{(m)} - \zeta_i^{(r)}\right)^2 < \varepsilon^2 \Longrightarrow \left(\zeta_i^{(m)} - \zeta_i^{(r)}\right)^2 < \varepsilon^2; \forall i = 1,2, \dots., n$$

لأن مجموع مقادير موجبة تماما اصغر من ε^2 بالتالي كل حد من هذه المجاميع اصغر من ε^2

$$\xRightarrow{\text{بالجذر}} \left|\zeta_i^{(m)} - \zeta_i^{(r)}\right| < \varepsilon \quad ; \quad \forall i = 1,2, \dots., n \quad \left(\text{حيث} \sqrt{x^2} = |x|\right)$$

أي نلاحظ أنه تحقق لدينا :

$$\forall \varepsilon > 0\,; \exists n_0 \in \mathbb{N}; m, r \geq n_0; \left|\zeta_i^{(m)} - \zeta_i^{(r)}\right| < \varepsilon\,; i = 1,2,3,4, \dots. n$$

أي أن $\left(\zeta_i^{(m)}\right); i = 1,2,3, \dots., n$ هي n متتالية حقيقية كوشية في $\mathbb{R}$

وبما أن الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}$ هو فضاء تام فإن كل متتالية كوشي فيه تكون متقاربة فيه وبالتالي فإن المتتاليات الحقيقية $\left(\zeta_i^{(m)}\right); i = 1,2, \dots, n$ هي متتاليات متقاربة في $\mathbb{R}$ وبفرض أنها تتقارب من ζ_i أي :

$$\zeta_i^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \zeta_i \in \mathbb{R}\,; i = 1,2, \dots\dots, n$$

والتوضيح كالتالي :

$$x_1 = \zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}, \dots\dots\dots, \zeta_n^{(1)}$$

$$x_2 = \zeta_1^{(2)}, \zeta_2^{(2)}, \dots \dots \dots, \zeta_n^{(2)}$$

$$\begin{matrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{matrix}$$

$$x_m = \zeta_1^{(m)}, \zeta_2^{(m)}, \dots \dots \dots, \zeta_n^{(m)}$$

العمود الأول عبارة عن متتالية حقيقية كوشية ومتقاربة وكذلك جميع الأعمدة حتى n عمود ونلاحظ أنه عندما $m \to \infty$ فإن العمود الأول يتقارب إلى ζ_1 والعمود الثاني يتقارب إلى ζ_2 و هكذا حتى العمود n يتقارب إلى ζ_n وبالتالي تشكل لدينا العنصر $x = (\zeta_1, \zeta_2, \dots \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$

بقي علينا إثبات أن $x_m \xrightarrow[m \to \infty]{} x$

أي نريد برهان أن

-٢ $\forall \varepsilon > 0 ; \exists n_0 \in \mathbb{N}; m \geq n_0; d(x_m, x) < \varepsilon$

بالاعتماد على العلاقة -١- وبجعل $r \to \infty$ يكون

$$\lim_{r \to \infty} d(x_m, x_r)$$

$$= \lim_{r \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\zeta_i^{(m)} - \zeta_i^{(r)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left[\lim_{r \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\zeta_i^{(m)} - \zeta_i^{(r)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \lim_{r \to \infty} \left(\zeta_i^{(m)} - \zeta_i^{(r)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\zeta_i^{(m)} - \lim_{r \to \infty} \zeta_i^{(r)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

كون $\zeta_i^{(r)}$ متقاربة من ζ_i عندما $r \to \infty$ يكون لدينا :

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \lim_{r \to \infty} \left(\zeta_i^{(m)} - \zeta_i^{(r)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = d(x_m, x) < \varepsilon$$

ومنه العلاقة ٢ محققة وبالتالي $x_m \xrightarrow[m \to \infty]{} x$ متقاربة

أي أنه كل متتالية كوشية في الفضاء $\mathbb{R}^n$ متقاربة .

$\Longleftarrow$ الفضاء $\mathbb{R}^n$ هو فضاء تام على المترك العرف عليه .

انتهت المحاضرة

إعداد: غفران الريابي – عبد الرحمن البحش – سماح علوان