المحاضرة الثانية

- هل الدالة محدب أم مقعر؟ ولماذا؟

$$f(x,y) = 3x + 7y - 4$$

الحل: $\forall A, B$

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \overset{?}{\underset{=}{\lesseqgtr}} \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B)$$

$A = (x_1, x_2)$
$B = (y_1, y_2)$

$$S_1 = f(\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1 , \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2)$$

$$= 3(\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1) + 7(\lambda x_2 + (1-\lambda) y_2) - 4$$

$$= 3\lambda x_1 + 3(1-\lambda) y_1 + 7\lambda x_2 + 7(1-\lambda) y_2 - 4$$

$$= \lambda(3x_1 + 7x_2) + (1-\lambda)(3y_1 + 7y_2) \overbrace{-4 + 4\lambda}^{-4(1-\lambda)} - 4\lambda$$

نضيف ونطرح (4λ)

$$= \lambda(3x_1 + 7x_2 - 4) + (1-\lambda)(3y_1 + 7y_2 - 4)$$

$$= \lambda f(x_1, x_2) + (1-\lambda) f(y_1, y_2)$$

$$= \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B)$$

$$\Rightarrow f(\lambda A + (1-\lambda)B) = \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B)$$

f الدالة محدب ومقعر بنفس الوقت (مستقيم)

(تطبق المحدب على المقعر).

خواص:

① نفرض لدينا $\{C_i , i\in I\}$ مجموعة من المجموعات المحدبة

$\bigcap_{i\in I} C_i$: مجموعة محدبة

مثال:

$$C_1 = \{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 ; \underbrace{x^2+y^2\le 1}_{\text{قرص}} \text{ و } \underbrace{x+3y+7=0}_{\text{مستقيم}} \}$$

المستقيم مجموعة محدبة، القرص مجموعة محدبة. وبالتالي تقاطع محدبتين هي مجموعة محدبة.

② مجموع شعاعين من مجموعتين محدبتين هو محدب
نفرضاً (C_1, C_2) محدبتان فإن

$$D=\{x_1+x_2 : x_1\in C_1 , x_2\in C_2\}$$

$\Longrightarrow$ D مجموعة محدبة

③ صورة مجموعة محدبة وفق تابع خطي هو مجموعة محدبة

④ إذا كانت C مجموعة محدبة و $f: C\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع محدب

$$A_1=\{x\in C : f(x)\le a\} , A_2=\{x\in C : f(x)<a\}$$

حيث a عدد ثابت فإن A_1 و A_2 محدبتان

* البرهان:

نأخذ نقطتين $x,y\in A_1$ ونبرهن أن $z=\lambda x+(1-\lambda)y\in A_1$

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)=f(z)\le \lambda a+(1-\lambda)a$$

لدينا f تابع محدب $\Longleftarrow$

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

لدينا f تابع محدب

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

وكون $x, y \in A_1 \Longrightarrow f(x) \leq a$ و $f(y) \leq a$

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \leq \lambda a+(1-\lambda)a$$

$$\Longrightarrow f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda a+(1-\lambda)a$$

مما سبق نجد أن A_1 مجموعة محدبة.

وبنفس الطريقة نثبت أن A_2 محدبة أيضاً.

5) نفرض $\{f_i : C \longrightarrow \mathbb{R} : i \in I\}$ مجموعة من التوابع المحدبة

فإن $f_i : C \longrightarrow \mathbb{R}$ و $f = \sum_{i \in I} w_i f_i$ تابع محدب

حيث $0 < w_i$ و $\forall i \in I$

مثال:

$$\begin{cases} f_1 = 3x+7y-4 \\ f_2 = x^2+y^2-5 \end{cases}$$ توابع محدبة

هل التابع $f = 2f_1+3f_2$ محدب

هكذا يأتي السؤال $\{ f = \underline{6x}+\underline{14y}-8+3x^2+3y^2+15$

الأمثال موجبة فنستخدم الخاصة (5) (مجموعة توابع محدبة هو تابع محدب)

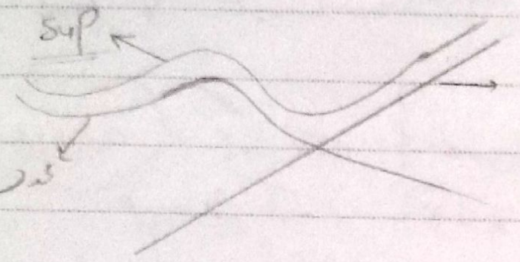
ملاحظة:

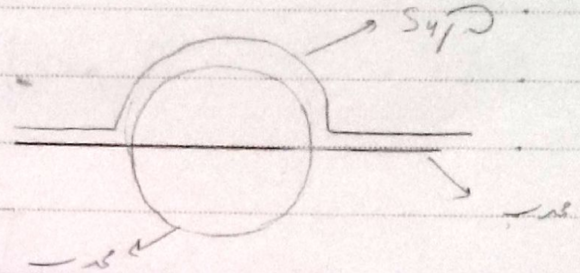
إذا كان التابع في الأسئلة ليس محدب فالأسهل أن نبحث عن مثال معاكس وليس أن نستخدم الخواص لإثبات ذلك.

⑥ إذا كانت C مجموعة محدبة و $f_i : C \to R$; $\forall i \in I$ توابع محدبة

فإن : $h : C \to R$ حيث : $h(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$

هو تابع محدب





الـ sup هنا جزء من التابع الخطي جزء من المستقيم

⑦ إذا كانت C مجموعة محدبة و $f : C \to R$ قابل للاشتقاق في C

f محدب $\Leftrightarrow$

$\forall x, y \in C$: $f(y) \geq f(x) + \nabla^T f(x) \cdot (y - x)$

حيث $\nabla f(x) = f'(x) : x \in R$ المشتق

في حال كان $x \in R^n$ فإن $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{bmatrix}$ مشتق جاكوبي

$\nabla^2 f(x)$ مشتق هيسي

$\nabla^T f(x)$ $[\,-\,-\,-\,-\,]$ مشتق جاكوبي

ملاحظة: إذا كانت المتراجحة محققة بشكل تام عندما $x \neq y$ $\Leftarrow$ f محدب تماماً

⑧ أهم الخواص:

- إذا كانت C مجموعة محدبة، وليكن $f : C \to R$ قابل للاشتقاق مرتين في C ومستمر

إذا كان $\nabla^2 f_{(x)}$ معرف موجب من أجل كل $x \in C$ $\Leftrightarrow$ f محدب

إذا كان $\nabla^2 f_{(x)}$ معرف سالب من أجل $x \in C$ $\Leftrightarrow$ f مقعر

ملاحظة: إذا كان f محدب $\Leftarrow$ $-f$ مقعر

في حال كان $x \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla^2 f_{(x)} = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$ الهسي

ملاحظة: نقول عن مصفوفة H أنها معرفة موجبة إذا حققت

$\forall 0 \neq z \in C \quad : z^T . H . z \geq 0$

مثال

$f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 7$

$f_x = 2x$

$f_y = 6y$

$\Rightarrow \nabla^2 f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

هامش

$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$

مشتق الـ f_x بالنسبة لـ $x = 0$

$z = (z_1, z_2) \neq 0$ $\quad z^T . \nabla^2 f . z = [z_1 \; z_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$

$z^T \nabla^2 f . z = 2z_1^2 + 6z_2^2 \geq 0$

$\Longrightarrow \nabla^2 f$ مصفوفة معرفة موجبة $\Rightarrow$ f محدب

لإثبات أن المصفوفة مربعة موجبة، نأخذ أي شعاع $z \neq 0$ ونضربه من اليمين ومن اليسار بالضرب بمنقوله فإذا كان:

$z^T H z \geq 0 \Leftarrow$ تكون المصفوفة مربعة موجبة

مثال: $f(x,y) = x^2 - 3y^2 + 7$

$f_x = 2x \quad , \quad f_y = -6y$

$\nabla^2 f = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}$ ، $z = (z_1, z_2) \neq (0,0)$

$z^T \nabla^2 f \, z = [z_1 \; z_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 2z_1^2 - 6z_2^2$

- التابع f ليس محدب ليس مقعر
- ستوجد قيم يكون سالب وستوجد قيم أخرى يكون موجب
- هنا النهايات ستكون صغرى ومرة عظمى وهنا المشكلة

* ليكن Q مصفوفة مربعة فإن:

$f(x) = x^T Q x$ محدب $\Longleftrightarrow$ Q مربعة موجبة

مثال: $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 7$

التابع محدب

$f(x,y) = [x \; y] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 7$

حيث

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ مربعة موجبة

The end