◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: السادسة   عنوان المحاضرة: الحركة اللولبية للجسم الصلب

الحركة اللولبية للجسم الصلب

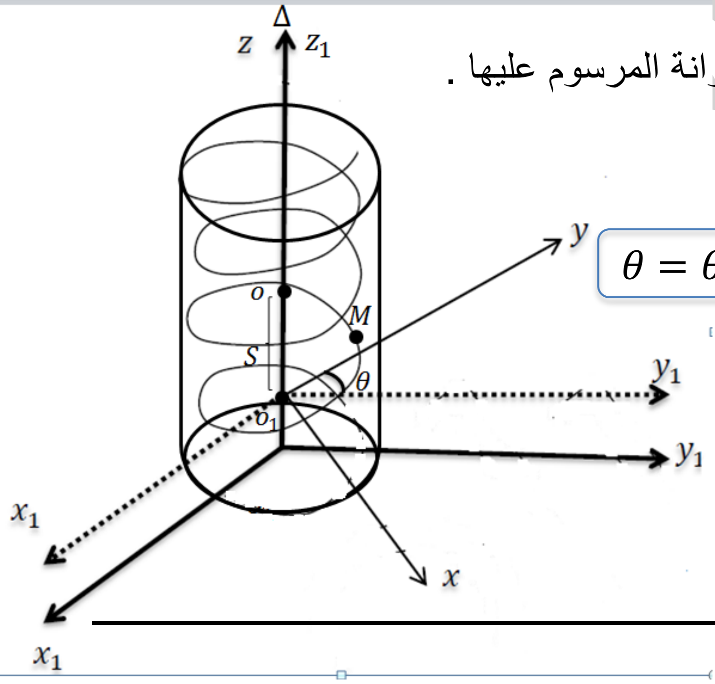
تعريفها :

هي حركة جسم صلب ينسحب فيه مستقيم محدد (D) من الجسم على مستقيم ثابت (D_1) في الفراغ الثابت بحيث ترسم كل نقطة من هذا الجسم لولب دائري وتبقى خطى اللولب كلها متساوية .

- لدينا وسيطين للحركة اللولبية ((زاوية الدوران (θ) والانسحاب (S))) لكن لدينا درجة حرية واحدة للحركة أي " معادلة حركة واحدة "
<u>لأن</u> اللولب الدائري يتصف بالخاصة التالية وهي أن الانسحاب وفق اللولب يتناسب مع زاوية الدوران حول المحور , أي أن الوسيطين (S,θ) مرتبطان بالعلاقة $S = b.\theta$, مما يجعل الوسيط (θ) كافياً لتعيين موضع أي نقطة من الجسم ونسمي (b) بالخطوة المختزلة للولب
وإذا دار الجسم دورة كاملة فإن الانسحاب (S) يصبح : $S = B = 2\pi.b$
وتسمى (B) خطوة اللولب .
- إن المسارات اللولبية تختلف في نصف قطر الأسطوانة المرسوم عليها .

مثال على الحركة اللولبية سلك الدفتر

تعيين موضع نقط الجسم



علمنا أن للجسم معادلة حركة وحيدة وهي من الشكل $\boxed{\theta = \theta(t)}$

ويتعين موضع النقطة (M) من الجسم بالعلاقة :

$$\forall\, M \in S \quad : \quad \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{O_1M} = S\vec{k} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{O_1M} = b\theta\vec{k} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

حيث (O_1) نقطة ثابتة

(O) نقطة متماسكة مع الجسم و (b) الخطوة المختزلة للحركة اللولبية

$(\vec{k})$ شعاع الواحدة لمحور الحركة اللولبية (Δ)

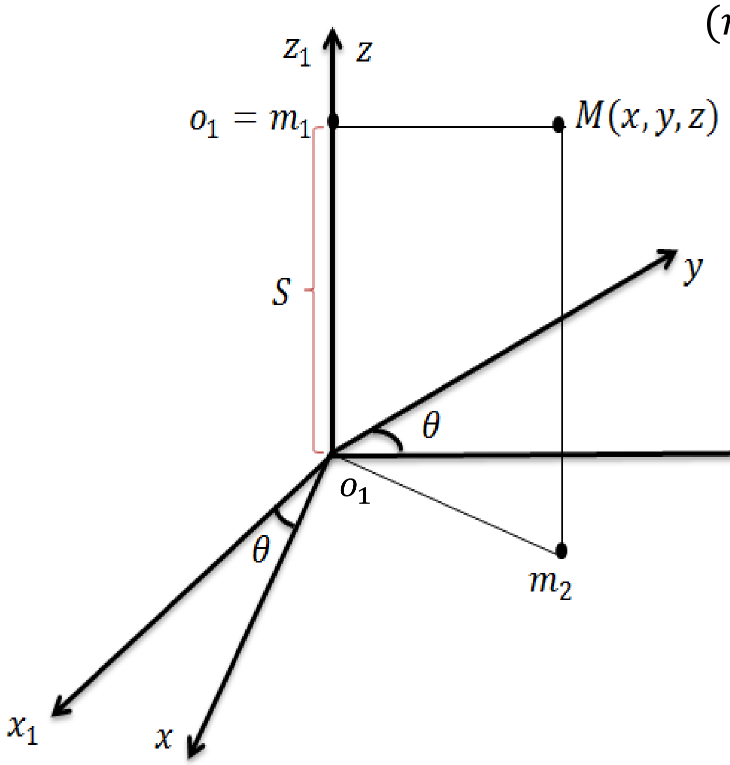
تعيين سرع نقط الجسم

لتعيين سرعة نقطة (M) من الجسم

نسقط (M) على المستوي $(o_1x_1y_1)$ وليكن المسقط (m_1)

ونسقط (M) على المحور (o_1z_1) وليكن المسقط (m_2)

ومنه: $\vec{v}(\mathrm{M}) = \vec{v}(m_1) + \vec{v}(m_2)$



وبما أن حركة (m_1) في المستوي هي حركة دائرية

وشعاع دورانها هو $(\vec{\omega})$ وسرعتها :

$$\boxed{\vec{v}(\mathrm{m}_1) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{o_1M}}$$

وبما أن (m_1) <u>انسحابية</u> فإن سرعتها هي :

$$\vec{v}(\mathrm{m}_2) = S'\vec{k}$$

وبالتالي فإن متجه سرعة (M) يصبح :

$$\vec{v}(\mathrm{M}) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{o_1M} + S'\vec{k}$$

$$\boxed{\Longrightarrow \vec{v}(\mathrm{M}) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{o_1M} + b\theta'\vec{k} \quad \ldots.(1)}$$

تعيين تسارع نقط الجسم

نشتق شعاع سرعة النقطة (M) حيث $M \in S$ ومنه :

$$\vec{\Gamma}(M) = b\theta''\vec{k} + \frac{d\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{o_1M}\right)}{dt}$$

$$\Longrightarrow \vec{\Gamma}(\mathrm{M}) = b\varepsilon\vec{k} + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{oM}}{dt}$$

وهي علاقة التطبيق المباشر للمسائل

$$\Longrightarrow \vec{\Gamma}(\mathrm{M}) = b\varepsilon\vec{k} + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{mM})$$

حيث (m) <u>هي المسقط القائم على محور الدوران</u> (Δ) وبالتالي :

$$\Longrightarrow \vec{\Gamma}(M) = b\varepsilon\vec{k} + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{mM})$$

$$\boxed{\Longrightarrow \vec{\Gamma}(M) = b\varepsilon\vec{k} + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} - \omega^2\overrightarrow{mM}}$$

حيث $(b\varepsilon\vec{k})$ تسارع انسحابي

و $(\vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM})$ تسارع مماسي

و $(-\omega^2 mM)$ تسارع ناظمي

الدراسة التحليلية للحركة اللولبية

نختار جملة محاور ثابتة $(o_1x_1y_1z_1)$ فيها (o_1z_1) منطبق على محور الدوران (Δ)

ونختار $(oxyz)$ جملة متماسكة مع الجسم فيها (oz) منطبق على محور الدوران .

(o) تنطبق على (o_1) في بداية الحركة :

$$\overrightarrow{oo_1} = s\overrightarrow{k_1} = b\theta\overrightarrow{k_1}$$

لنأخذ العلاقة الشعاعية لموضع النقطة (M)

$$\overrightarrow{o_1M} = b\theta\vec{k} + \overrightarrow{oM}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{o_1M} = b\theta\vec{k} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{o_1M} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + (z + b\theta)\vec{k}$$

تذكرة في المحاضرة السابقة :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\imath} &= cos\theta\overrightarrow{\imath_1} + sin\theta\overrightarrow{\jmath_1}\\ \vec{\jmath} &= -\sin\theta\overrightarrow{\imath_1} + cos\theta\overrightarrow{\jmath_1}\\ \vec{k} &= \overrightarrow{k_1}\end{aligned}}$$

بإسقاط العلاقة الشعاعية على جملة المحاور الثابتة نجد :

$$x_1 = xcos\theta - ysin\theta$$
$$y_1 = xsin\theta + ycos\theta$$
$$z_1 = z + b\theta$$

حيث (θ) تكون بين المستوي الثابت والمستوي المتحرك .

إن $(x_1y_1z_1)$ هي إحداثيات النقطة (M) على المحاور الثابتة وعند تعويض $\boxed{\theta = \theta(t)}$ نحصل على معادلات حركة النقطة (M) , **وبحذف الوسيط** (t) من معادلات الحركة نحصل على **معادلتي المسار** للنقطة (M) .

السرعة تحليلياً

تتعين مركبات شعاع السرعة لنقطة (M) على جملة المحاور الثابتة من **الاشتقاق المباشر** لمركبات النقطة (M)

في الجملة الثابتة :

$$\vec{v}(\mathrm{M}) = \begin{cases} x_1' = (-xsin\theta - ycos\theta)\theta' \\ y_1' = (xcos\theta - ysin\theta)\theta' \\ z_1' = b\theta' \end{cases}$$

أو نطبق القانون :

$$\vec{v}(\mathrm{M}) = b\theta'\overrightarrow{k_1} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{o_1M}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(\mathrm{M}) = b\theta'\overrightarrow{k_1} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath_1} & \overrightarrow{\jmath_1} & \overrightarrow{k_1} \\ 0 & 0 & \theta' = \omega \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(\mathrm{M}) = b\theta'\overrightarrow{k_1} - \theta' y_1 \vec{\imath_1} + \theta' x_1 \vec{\jmath_1}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(\mathrm{M}) = -\theta'\,(x\sin\theta + y\cos\theta)\vec{\imath_1} + \theta'(x\cos\theta - y\sin\theta)\vec{\jmath_1} + b\theta'\overrightarrow{k_1}$$

التسارع تحليلياً

تتعين مركبات شعاع التسارع لنقطة (M) على جملة المحاور الثابتة من **<u>الاشتقاق المباشر</u>** لمركبات شعاع السرعة $\vec{v}(M)$

<u>في الجملة الثابتة :</u> و هنا الاشتقاق اشتقاق جداء لشعاع السرعة .

$$\vec{\Gamma}(M) = (x_1'', y_1'', z_1'') = \begin{cases} x_1'' = (-x\sin\theta - y\cos\theta)\theta'' + (-x\cos\theta + y\sin\theta)\theta'^2 \\ y_1'' = (x\cos\theta - y\sin\theta)\theta'' + (-x\sin\theta - y\cos\theta)\theta'^2 \\ z_1'' = b\theta'' \end{cases}$$

<u>أو نطبق القانون :</u>

$$\vec{\Gamma}(M) = b\theta''\overrightarrow{k_1} + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$$

$$\vec{\Gamma}(M) = b\theta''\overrightarrow{k_1} + \begin{vmatrix} \vec{\imath_1} & \vec{\jmath_1} & \overrightarrow{k_1} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath_1} & \vec{\jmath_1} & \overrightarrow{k_1} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_{x_1} & v_{y_1} & b\theta' \end{vmatrix}$$

حيث $v_{y_1} = (x\cos\theta - y\sin\theta)\theta'$, $v_{x_1} = (-x\sin\theta - y\cos\theta)\theta'$

$$\vec{\Gamma}(M) = \left(-\theta'' y_1 - \theta' v_{y_1}\right)\vec{\imath_1} + \left(\theta'' x_1 + \theta' v_{x_1}\right)\vec{\jmath_1} + b\theta''\overrightarrow{k_1} \quad : \ \varepsilon = \theta'' , \omega = \theta'$$

و هذه العلاقات تمثل **مركبات التسارع على الجملة الثابتة** .

<u>أما</u> **السرعة والتسارع في الجملة المتماسكة**

$$\overrightarrow{O_1M} = S\vec{k} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\vec{v}(\mathrm{M}) = b\theta'\vec{k} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM} \ \Longrightarrow \vec{v}(\mathrm{M}) = b\theta'\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \theta' \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{v}(\mathrm{M}) = -\theta' y\vec{\imath} + \theta' x\vec{\jmath} + b\theta'\vec{k}}$$ و هي عبارة السرعة

$$\vec{\Gamma}(M) = b\theta''\vec{k} + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$$

$$\Longrightarrow \vec{\Gamma}(M) = b\theta''\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\theta' y & \theta' x & b\theta' \end{vmatrix}$$

وهي عبارة التسارع $\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = (-\theta''y - \theta'^2x)\vec{\imath} + (\theta''x - \theta'^2y)\vec{\jmath} + b\theta''\vec{k}$

تعريف الحركة اللولبية المنتظمة

نسمي الحركة اللولبية بالحركة اللولبية المنتظمة عندما يكون شعاع الدوران **ثابت** أي السرعة ثابتة والتسارع الناظمي معدوم .

إن عبارة السرعة لا تتغير أما عبارة التسارع تتغير فتصبح :

$$\vec{\Gamma}(M) = -\omega^2\overrightarrow{mM}$$

مسائل

المسألة الأولى

تدور أسطوانة دائرية حول محورها بسرعة زاوية ثابتة $(\omega = 2)$ وينسحب محورها على حامله بسرعة منتظمة $(v = 6)$, **المطلوب :**

تعيين الخطوة المختزلة للولب (الحركة اللولبية) للاسطوانة , ثم تعيين موضع ومسار وسرعة نقطة من الأسطوانة , احداثياتها بالنسبة لجملة متماسكة مع الأسطوانة هي $(2,2,3)$.

المسألة الثانية

يتحرك قرص دائري نصف قطره (a) بحركة لولبية حول محوره بسرعة زاوية ثابتة $(\omega = \omega_0)$ علما بأن محور القرص ينتقل بمقدار $(2\omega_0)$ عندما يتم القرص دورة كاملة حول محوره , **والمطلوب :**

تعيين مسار وسرعة نقطة من محيط القرص .

المسألة الثالثة

$OABC$ صفيحة مربعة الشكل , طول ضلعها (a) فيها C, O نقطتان ثابتتان والنقطة (A) ترسم دائرة بسرعة زاوية (ω) , **والمطلوب :**

أوجد مسار مركز الصفيحة الهندسي وسرعته وليكن مركز الصفيحة (D) .

المسألة الرابعة

ABقضيب طوله (ℓ) فيه النقطة (A) ترسم المحور (o_1z_1) الثابت بسرعة ثابتة والنقطة (B) تدور حول (OA) بسرعة زاوية ثابتة (ω) بحيث يبقى $(o_1z_1 \perp AB)$ **والمطلوب :**

أوجد مسار وسرعة وتسارع (B) .

انتهت المحاضرة

اصبر على ما تَكرَه فيما يُلزِمُكَ الحق، واصبِر عمّا تُحِبُّ فيما يدعوكَ إليه الهوى

إعداد: محمد علي فليون ** هدى حبشية

نعتذر عن ورود خطأ في المحاضرة الرابعة الصفحة 3

إن $\overrightarrow{om} \wedge \overrightarrow{\omega} = 0$ لأن $\overrightarrow{\omega} \parallel \overrightarrow{om}$

و بما أن كل من $o, \underline{M} \in \Delta$

الصواب:

إن $\overrightarrow{om} \wedge \overrightarrow{\omega} = 0$ لأن $\overrightarrow{\omega} \parallel \overrightarrow{om}$

و بما أن كل من $o, \underline{m} \in \Delta$