نظري

◄ دكتور المادة : حزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الخامسة عشر ◄ عنوان المحاضرة : التماثلات الزمرية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-مبرهنات وأمثلة عن التماثلات الزمرية والتشاكل.

٢- سندخل في فصل جديد وهو زمرة التماثلات .

مبرهنة : القضايا التالية صحيحة.

١) كل زمرة دوارة وغير منتهية تماثل الزمرة الاعداد الصحيحة Z .
٢) جميع الزمر الدوارة وغير المنتهية متماثلة .

البرهان :

١) لتكن G زمرة دوارة غير منتهية عندئذ :

يوجد $a \in G$ حيث $G = < a >$

لنعرف العلاقة : $\varphi : Z \to G$ بالشكل :

$$\forall n \in Z \; ; \; \varphi(n) = a^n$$

واضح ان العلاقة φ هي تطبيق متباين وغامر وهي ايضاً تشاكل لأنه لاجل كل $n, m \in Z$ فإن:

$$\varphi(n+m) = a^{n+m} = a^n . a^m = \varphi(n) . \varphi(m)$$

فهو تماثل أي ان $Z \cong G$

٢) واضح بما ان جميع الزمر الدوارة وغير المنتهية تماثل Z فهي أيضاً متماثلة.

مبرهنة :

١) كل زمرة دوارة ومنتهية ومرتبتها n تماثل الزمرة Z_n .
٢) جميع الزمر الدوارة المنتهية ذات المرتبة n متماثلة .

Syria Math Team

البرهان :

١) لتكن $G = < a >$ زمرة دوارة منتهية ومرتبتها n :

لنعرف العلاقة $\varphi : Z_n \to G$ بالشكل :

$$\forall\, m \in Z_n \quad ; \quad \varphi(m) = a^m$$

من الواضح أن φ تطبيق لان : $\forall m_1, m_2 \in Z_n \ : m_1 = m_2$

فإن : $\varphi(m_1) = a^{m1} = a^{m2} = \varphi(m_2)$

و هو تشاكل لأن : $\forall\, m_1, m_2 \in\ Z_n;$

$$\varphi(m_1 + m_2\,) = a^{m_1+m_2} = a^{m_1}.\,a^{m_2} = \varphi(m_1).\,\varphi(m_2)$$

كما أن φ غامر لأن: $\forall y \in G; y = a^k \ : 0 \le k < n$ ومنه $k \in Z_n$ ((المنطلق)) وبالتالي:

$$\varphi(k) = a^k = y$$

وايضاً φ متباين لان: $\forall s, t \in Z_n \ : \ \varphi(s) = \varphi(t); a^s = a^t$ ان

$s = t$ لانه لو فرضنا ان $s \neq t$ فإن $a^s \neq a^t$ و هذا غير ممكن ومنه φ تماثل.

٢) ينتج مباشرةً من (١).

أمثلة:

أي من هذه الزمر متماثلة : $U(5) \ , U(10) \ , Z_4$

زمرة دوارة مرتبتها n $\quad Z_4 = \{0,1,2,3\}$

زمرة دوارة مرتبتها n $\quad U(10) = \{1,3,7,9\}$

زمرة دوارة مرتبتها n $\quad U(5) = \{1,2,3,4\}$

$$3^0 = 1 \quad , \quad 3^1 = 3 \quad , 3^2 = 9 \ , \ 3^3 = 7 \ , \ 3^4 = 1$$

اذاً نجد ان $U(5) \cong Zu \cong U(10)$

مثال ٢:

هل $U(10)\ ,\ U(\,12)$ متماثلتين ؟ برهن!

زمرة دوارة مرتبتها 4 $U(10)=\{1,3,7,9\}=<3>$

$$U(12)=\{1,5,7,11\}$$

لنبحث فيما اذا كانت دوارة:

$11^0=1$	$7^0=1$	$5^0=1$
$11^1=11$	$7^1=7$	$5^1=5$
$11^2=1$	$7^2=1$	$5^2=1$
$U(12)\neq<11>$	$U(12)\neq<7>$	$U(12)\neq<5>$

إذاً $U(12)$ ليست دوارة ومرتبتها 4.

طريقة أولى: والان لنرى ان كانت متماثلة $U(10)\cong U(12)$؟

لنفرض جدلاً أن $U(12)\cong U(10)$ فإنه يوجد تشاكل متباين و غامر

$$\varphi: U(10)\longrightarrow U(12)$$

بما انه غامر نجد: $\varphi\big(U(10)\big)=\varphi\big(U(12)\big)$ ومنه $U(12)$ زمرة دوارة.

و هذا غير ممكن ،فإن الزمرتين غير متماثلتين.

طريقة ثانية: لدينا $3\in U(10)$, $\forall x\in U(12); x^2=1$ ومنه:

$$\varphi(3^2)=\varphi(3).\varphi(3)=\underbrace{\big(\varphi(3)\big)^2}_{\in U(12)}=\varphi(9)=1=\varphi(1)\Rightarrow 9=1$$

لأنه غامر ، و هذا غير ممكن في $U(10)$ ومنه الزمرتين غير متماثلتين.

تمهيدية:

ليكن $f: G\longrightarrow \bar{G}$ تشاكل زمري وليكن $a\in G$ عندئذٍ:

مرتبة العنصر = مرتبة صورته المباشرة $0(a)=0\big(f(a)\big)$

البرهان:

Syria Math Team

لنفرض ان $a \in G$ وأن $0(a) = n$ ومنه $a^n = e \Rightarrow f(a^n) = f(e) = e'$

$$(f(a))^n = e'$$

ولنفرض ان $0(f(a)) = s$ فإن $s \leq n$ ولدينا $(f(a))^s = e' \Rightarrow f(a^s) = f(e)$

$$\Rightarrow a^s = e$$

ومنه $n \leq s \Rightarrow n = s$.

مبرهنة: ليكن $n > 1$ عدد صحيح و k قاسم موجب للعدد n عندئذٍ يوجد تشاكل: $\varphi: U(n) \longrightarrow U(k)$ يحقق : $ker(\varphi) = U_k(n)$.

البرهان:

لنعرف العلاقة φ بالشكل:

ليكن $x \in U(n)$ عندئذٍ $1 \leq x < n \quad , gcd(x,n) = 1$ ((سنربط x الذي من المنطلق مع عنصر من المستقر وليكن مثلاً: $y \in U(k)$ بحيث يتمتع بخاصتين:

١- $1 \leq y < k$
٢- $\gcd(y,k) = 1$.))

وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q,r \in Z$ حيث $0 \leq r < k$: $\qquad x = q.k + r$

١) عندما $r = 0$ فإن $x = q.k$ وهذا يعني ان : k يقسم x ولدينا k يقسم n فرضاً فإن : $gcd(x,n) \neq 1$ وهذا مرفوض .

٢) ومنه نجد أن $r \neq 0$ فإن $0 < r < k$ أي : $1 \leq r < k$
لنتحقق أن $gcd(r,k) = 1$.

- اذا كان $gcd(r,k) = d > 1$ فإن : d يقسم r,k كما ان k يقسم n ومنه d يقسم n

ولما كان $gcd(r,k) = d$ فإنه يوجد $\alpha, \beta \in Z$ حيث $r = \beta.d \quad , \quad k = \alpha.d$

$$\Rightarrow x = q.k + r = q.\alpha.d + \beta.d = (q.\alpha + \beta)d$$

وهذا يبين أن $gcd(x,n) \neq 1$ لان d يقسم كل من x,n وهذا غير ممكن ومنه $gcd(r,k) = 1$

وهكذا نجد أن $r \in U(k)$.

- لنضع : $\varphi(x) = r = x.mod - k \in U(k)$ بما ان باقي القسمة وحيد فإن φ تطبيق.
كما ان φ تشاكل لأنه : $\varphi(x.y) = (x.y)mod - k \quad ; \quad \forall x, y \in U(n)$

$$= (x.mod - k)(y.mod - k) = \varphi(x).\varphi(y)$$

- لنبرهن أن : $\ker(\varphi) = U_k(n)$
إن $U_k(n) = \{x : \ x \in U(n) \, , x.mod - k = 1\}$
- ليكن $a \in U_k(n)$ عندئذٍ $a \in U(n) \quad , \quad a.mod - k = 1$
فإن $\varphi(a) = a.mod - k = 1$ ومنه: $a \in ker(\varphi)$ ومنه: $U_k(n) \subseteq ker(\varphi)$
- وليكن $x \in ker(\varphi)$ عندئذٍ $x \in U(n)$ ومنه: $\varphi(x) = x.mod - k = 1$
$\Rightarrow x \in U_k(n)$

ومنه: $ker(\varphi) \subseteq U_k(n)$ من الاحتوائين نجد : $ker(\varphi) = U_k(n)$.

زمرة التماثلات:

تمهيدية: لتكن G زمرة . إن مجموعة التماثلات من G الى G تشكل زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات

العنصر المحايد فيها هو التطبيق المطابق على G والتي سنرمز لها $Aut(G)$ **اثبت ذلك ((وظيفة)).**

خواص:

١) ترتيب تشاكلين هو تشاكل .عندما يكون معرف.
٢) ترتيب تشاكلين كل منهما متباين هو تشاكل متباين .
٣) ترتيب تشاكلين كل منهما غامر هو تشاكل غامر .
٤) ترتيب تشاكلين كل منهما تقابل هو تشاكل تقابل .
٥) كل تشاكل تقابل يملك تقابل عكسي هو ايضاُ تشاكل.

تمهيدية: لتكن G زمرة عندئذٍ : $\forall a \in G$ فإن العلاقة : $Ta : G \longrightarrow G$ المعرفة بالشكل :

$$\forall x \in G \, ; Ta(x) = a.x.a^{-1}$$

هي تماثل للزمرة G .

البرهان:

ليكن $x, y \in G$ بحيث $x = y$ عندئذٍ: $Ta(x) = a.x.a^{-1} = a.y.a^{-1} = Ta(y)$

فإن Ta تطبيق .

ان Ta تشاكل لان: $Ta(x.y) = a(x.y)a^{-1} = (a.x.a^{-1})(a.y.a^{-1})$

$$\Rightarrow Ta(x) = Ta(y)$$

وإن Ta متباين لان اذا كان : $Ta(x) = Ta(y) \Rightarrow a.x.a^{-1} = a.y.a^{-1} \Rightarrow x = y$

- ليكن $b \in G$ عندئذٍ $a^{-1}.b.a \in G$ (المنطلق)
- وإن $Ta(a^{-1}.b.a) = a(a^{-1}.b.a)a^{-1} = b$

أي ان Ta غامر . ومنه Ta تماثل للزمرة G.

تعريف : لتكن G زمرة ، $a \in G$ نسمي التماثل Ta تماثل داخلي للزمرة ونرمز لمجموعة التماثلات الداخلية $Inn(G)$ وهي مجموعة غير خالية.

ملاحظة: في حال كون الزمرة G تبديلية فإن مجموعة التماثلات الداخلية للزمرة G تكون مؤلفة من العنصر $\{Te \ : e \in G\}$ أي $Inn(G) = \{Te \ : e \in G\}$

وهو التماثل المولّد بالمحايد ويحوي عنصر واحد فقط..

إن الحياة تكون بالحقيقة ظلمة حالكة إذا لم ترافقها الحركة،

والحركة تكون عمياء لابركة فيها إن لم ترافقها المعرفة.

#جبران_خليل_جبران

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا همج