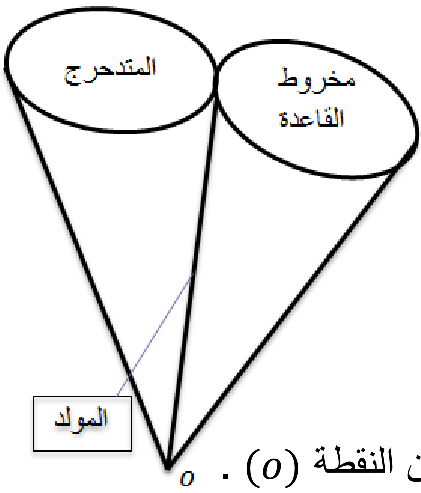
◄ دكتورة المادة : هدى شماط

◄ المحاضرة : الثامنة   عنوان المحاضرة : التدحرج دون انزلاق

سنبدأ معكم أصدقائي في هذه المحاضرة بفقرة جديدة بعنوان التدحرج دون انزلاق ..

التدحرج دون انزلاق



تعريف إن المحور الآني للدوران يتغير موضعه مع مرور الزمن في الفراغ الثابت ، فيرسم سطحاً مخروطياً (s_1) **نسميه القاعدة** .

القاعدة هي المحل الهندسي للمحور الآني للدوران في الجملة الثابتة كما أن المحور الآني للدوران يرسم سطحاً مخروطياً آخر في الجملة المتماسكة مع الجسم نسميه المتدحرج .

المتدحرج هو المحل الهندسي للمحور الآني للدوران في الجملة المتماسكة .

إن القاعدة و المتدحرج يشتركان بمستقيم نسميه المولد .

المولد هو عبارة عن المحور الآني للدوران الذي سرع نقاطه معدومة ويمر من النقطة (o) .

مثال على ذلك " حركة البلبل ".

إذاً **تتم الحركة الدورانية** حول نقطة ثابتة **بتدحرج** سطح مخروطي متماسك مع الجسم على سطح مخروطي ثابت في الفراغ **دون انزلاق** .

توزع السرع في الحركة الدورانية حول نقطة

لما كانت الحركة الدورانية للجسم الصلب حول نقطة ثابتة هي حركة دورانية حول محور آني Δ فإن سرعة نقطة ما M من الجسم يمكن أن تكتب بالشكل :

$$\vec{v}(M) = \frac{d\vec{oM}}{dt} = \vec{\omega_\Delta} \wedge \vec{oM}$$

سؤال : هل يتعلق شعاع الدوران $\vec{\omega}$ باختيار النقطة M ؟ ((الجواب بالمبرهنة التالية))

مبرهنة

إن شعاع الدوران $(\vec{\omega})$ لا يتعلق بالنقطة (M) (أي لا يتغير من نقطة لأخرى في نفس اللحظة) .

الإثبات

نفرض شعاع الدوران المتعلق بالنقطة (A) هو $(\overrightarrow{\omega_A})$ وشعاع الدوران المتعلق بالنقطة (B) هو $(\overrightarrow{\omega_B})$ ، نريد إثبات أن $\overrightarrow{\omega_A} = \overrightarrow{\omega_B}$

$$\forall A, B \in \Delta \quad : \vec{v}(A) = \overrightarrow{\omega_A} \wedge \overrightarrow{oA}$$
$$\vec{v}(B) = \overrightarrow{\omega_B} \wedge \overrightarrow{oB}$$

نطبق نظرية المساقط على A, B

$$\overrightarrow{AB}.\vec{v}(A) = \overrightarrow{AB}.\vec{v}(B)$$
$$\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{\omega_A} \wedge \overrightarrow{oA}\right) = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{\omega_B} \wedge \overrightarrow{oB}\right)$$

ومنه بتحويل الجداء الخارجي إلى جداء مختلط لنتمكن من ترتيبه بشكل دائري:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\omega_A}, \overrightarrow{oA}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\omega_B}, \overrightarrow{oB}\right)$$

<u>نأخذ تبديلين للجداء المختلط</u> :

التبديل الأول : $\left(\overrightarrow{oA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\omega_A}\right) = \left(\overrightarrow{oB}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\omega_B}\right)$

التبديل الثاني : $\left(\overrightarrow{\omega_A}, \overrightarrow{oA}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{\omega_B}, \overrightarrow{oB}, \overrightarrow{AB}\right)$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\omega_A}.\left(\overrightarrow{oA} \wedge \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{\omega_B}.\left(\overrightarrow{oB} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$$

لندخل في الطرف الأول النقطة B إلى oA بحيث $\overrightarrow{oB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{oA}$ فتصبح العلاقة السابقة :

$$\overrightarrow{\omega_A}.\left[\left(\overrightarrow{oB} + \overrightarrow{BA}\right) \wedge \overrightarrow{AB}\right] = \overrightarrow{\omega_B}.\left[\overrightarrow{oB} \wedge \overrightarrow{AB}\right]$$
$$\overrightarrow{\omega_A}.\left[\left(\overrightarrow{oB} \wedge \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{AB}\right)\right] = \overrightarrow{\omega_B}.\left(\overrightarrow{oB} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$$

حيث $\left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{AB}\right) = 0$ حسب خواص الجداء الخارجي

$$\overrightarrow{\omega_A}.\left[\left(\overrightarrow{oB} \wedge \overrightarrow{AB}\right)\right] = \overrightarrow{\omega_B}.\left[\left(\overrightarrow{oB} \wedge \overrightarrow{AB}\right)\right]$$

وبفرض $\overrightarrow{oB} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{C}$ ومنه $\overrightarrow{\omega_A}.\vec{C} = \overrightarrow{\omega_B}.\vec{C}$

وبما أن $\overrightarrow{\omega_A} \parallel \overrightarrow{\omega_B}$ لأنهما محمولان على محور الدوران الآني Δ (أي يصنعوا نفس الزاوية مع $\vec{C}$)

نستنتج : $\left|\overrightarrow{\omega_A}\right|.\left|\vec{C}\right|.\cos\alpha = \left|\overrightarrow{\omega_B}\right|.\left|\vec{C}\right|.\cos\alpha$

لهما نفس المنحى : $\boxed{\overrightarrow{\omega_A} = \overrightarrow{\omega_B}} \Longleftarrow \left|\overrightarrow{\omega_A}\right| = \left|\overrightarrow{\omega_B}\right|$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{v}(M) = \overrightarrow{\omega_\Delta} \wedge \overrightarrow{oM}}$$

حيث $\vec{\omega}$ شعاع الدوران الآني ومنه تم المطلوب.

توزع التسارعات

بما أن شعاع التسارع هو المشتق الزمني لشعاع السرعة فإن :

$$\forall M \in s : \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{oM}}{dt}$$
$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(\mathrm{M}) \Longrightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{mM}\right)$$
$$\Longrightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} - \overrightarrow{\omega^2}.\overrightarrow{mM}$$

حيث (m) **المسقط القائم** ل (M) على المحور الآني للدوران ، و$(\vec{\omega})$ تتغير بالقيمة والمنحى مع مرور الزمن ، و $(\vec{\varepsilon})$ شعاع التسارع الزاوي الآني .

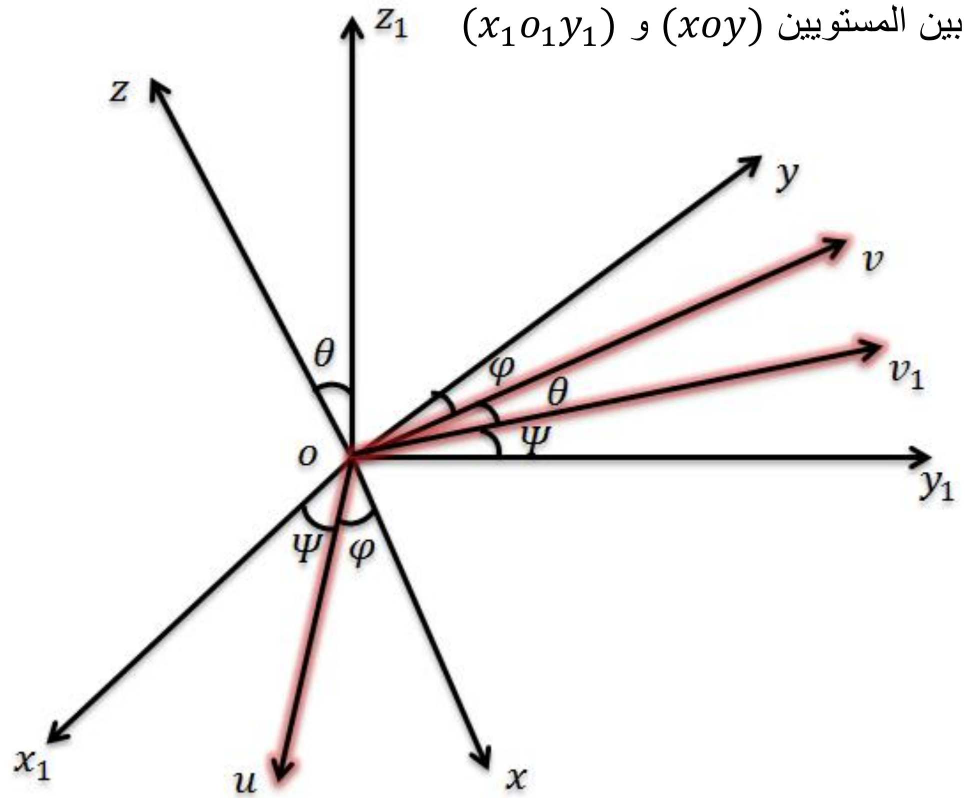
الدراسة التحليلية للحركة

تعيين الموضع

نختار الجملة الثابتة هي $(ox_1y_1z_1)$ والجملة المتحركة $(o\ x\ y\ z)$ وتشتركان بالنقطة (o) .
إن موضع أي نقطة (M) من الجسم الصلب (s) تتعين بإسقاط العلاقة الشعاعية :
$\overrightarrow{oM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ على الجملة الثابتة $(ox_1y_1z_1)$ حيث (x, y, z) مقادير ثابتة و $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ متجهات الواحدة لجملة متغيرة ، ونعلم ان لهذه المتجهات ثلاث وسطاء اي ثلاث درجات حرية كما وجدنا سابقاً ، وقد أوضح العالم اولر أنه يمكن اختيار هذه الوسطاء المستقلة ((ثلاث زوايا))
وقد سميت **" زوايا اولر "** وسنوضح كيف فعلاً يمكن لجملة الاحداثيات $(ox_1y_1z_1)$ أن تنطبق على الجملة $(o\ x\ y\ z)$ إذا دارت ثلاث دورانات متتالية كل دوران بمقدار احدى زوايا اولر .

تعيين زوايا اولر

نختار الجملة الثابتة $(o_1x_1y_1z_1)$ والجملة المتماسكة $(oxyz)$ حيث (o) منطبقة على (o_1) .
ليكن $(\overrightarrow{ou})$ <u>الفصل المشترك للمستويين</u> (ox_1y_1) و (oxy) .
حيث $(\overrightarrow{ou})$ موجود في المستوي (ox_1y_1) ويصنع مع (ox_1) زاوية (Ψ) , والزاوية بين $(\overrightarrow{ou})$ والمحور (ox) هي (φ) وتقع في المستوي (oxy) ونسمي الزاوية المحصورة بين المحورين (oz_1) و (oz) بالزاوية (θ) وتقع في المستوي (ozz_1) العمودي على الفصل المشترك $(\overrightarrow{ou})$ ، أي أن (θ) هي الزاوية بين المستويين (xoy) و $(x_1o_1y_1)$



نفرض أن الجملة $(oxyz)$ كانت في لحظة ما منطبقة على الجملة $(o_1x_1y_1z_1)$, **<u>بتدوير الجملة</u>** $(oxyz)$ حول المحور $(\overrightarrow{oz_1})$ بزاوية (Ψ) فينطبق المحور $(\overrightarrow{ox_1})$ على $(\overrightarrow{ou})$ ويحافظ $(\overrightarrow{oz_1})$ على موضعه وينطبق المحور $(\overrightarrow{oy_1})$ على محور $(\overrightarrow{ov_1})$ بحيث يعامد $(\overrightarrow{ou})$ ويقع في المستوي (ox_1y_1) .

ثم **<u>ندور الجملة الناتجة</u>** حول محور $(\overrightarrow{ou})$ بزاوية (θ) فينطبق $(\overrightarrow{oz_1})$ على $(\overrightarrow{oz})$ ويبقى $(\overrightarrow{ou})$ على حامله وينطبق المحور $(\overrightarrow{ov_1})$ على محور جديد ندعوه $(\overrightarrow{ov})$.

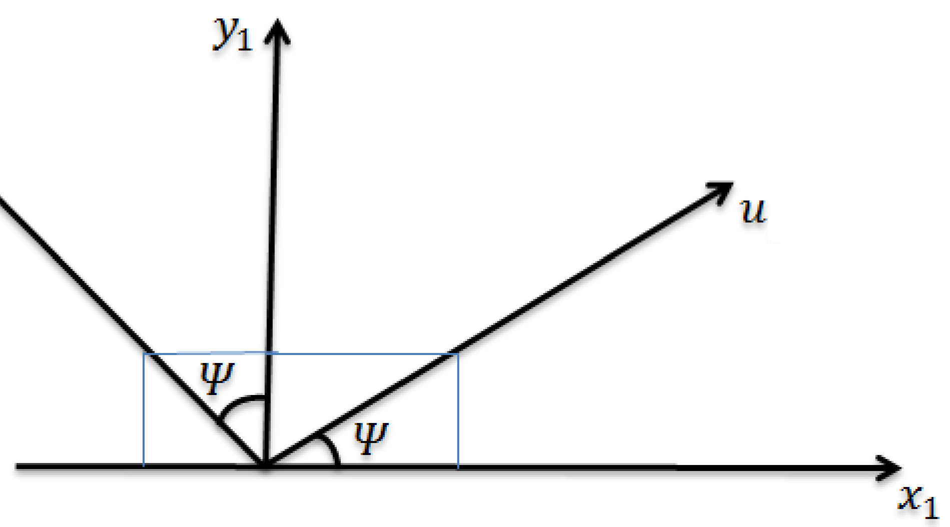
ثم **<u>ندور الجملة الناتجة</u>** حول المحور $(\overrightarrow{oz})$ بزاوية (φ) فيحافظ المحور $(\overrightarrow{oz})$ على موضعه وينطبق $(\overrightarrow{ou})$ على $(\overrightarrow{ox})$ وبالتالي ينطبق $(\overrightarrow{ov})$ على المحور $(\overrightarrow{oy})$ الذي يتمم الثلاثية (xyz) وبذلك نكون قد انتقلنا من الجملة $(ox_1y_1z_1)$ إلى $(oxyz)$ **بثلاثة دورانات متتالية نلخص ما سبق :**

$$ox_1y_1z_1 \xrightarrow[\Psi]{\text{دوران حول } oz_1} ouv_1z_1 \xrightarrow[\theta]{\text{دوران حول } ou} ouvz \xrightarrow[\varphi]{\text{دوران حول } oz} oxyz$$

حيث : في المستوي ox_1y_1 $ou \perp ov_1$ وفي المستوي oxy $ou \perp ov$

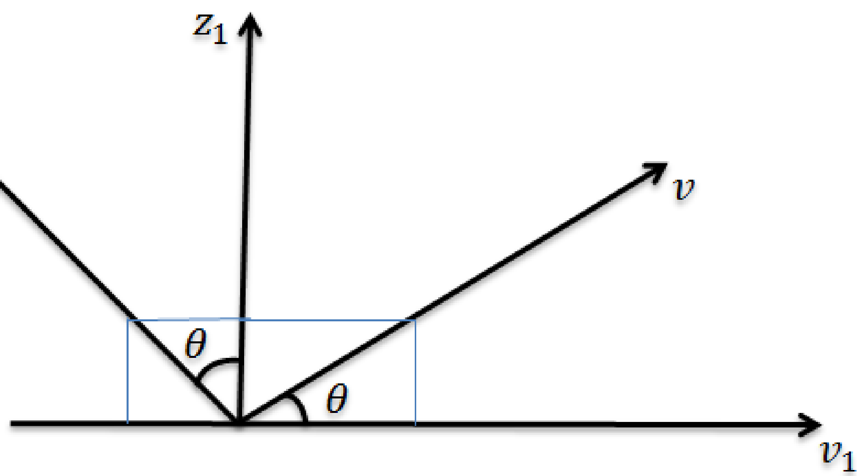
تتعين مركبات متجهات الواحدة $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ للمحاور $(x\ y\ z)$ على المحاور $(x_1y_1z_1)$ أو العكس باستخدام **مصفوفات الانتقال الثلاث التالية** :

ψ	$\vec{u}$	$\overrightarrow{v_1}$	$\overrightarrow{k_1}$
$\overrightarrow{i_1}$	$\cos\psi$	$-\sin\psi$	0
$\overrightarrow{j_1}$	$\sin\psi$	$\cos\psi$	0
$\overrightarrow{k_1}$	0	0	1



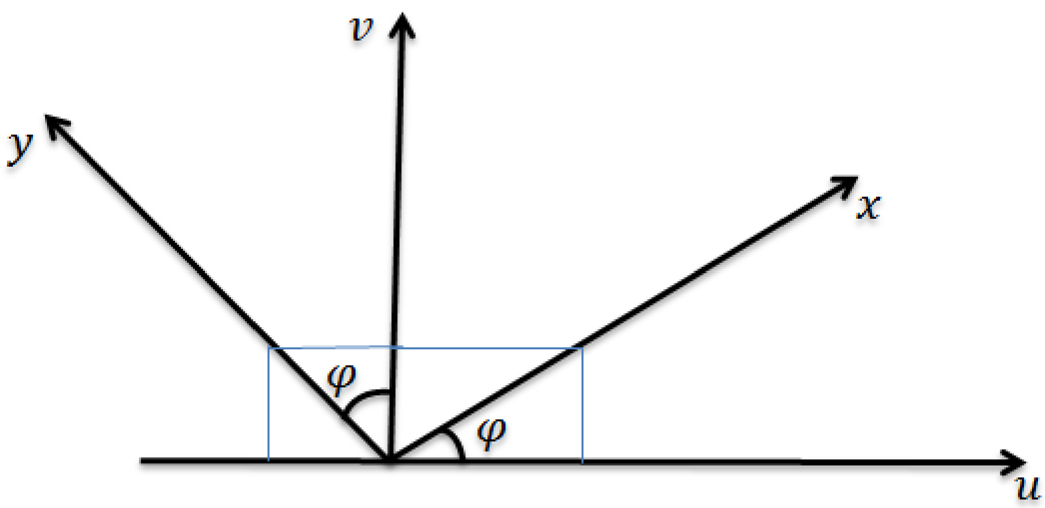
وبنقل السطر الأول عمود نحصل على :

$\boldsymbol{\theta}$	$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{k}$
$\vec{u}$	1	0	0
$\overrightarrow{v_1}$	0	$\cos\theta$	$-\sin\theta$
$\overrightarrow{k_1}$	0	$\sin\theta$	$\cos\theta$



ومن ثم نقوم بالتحويل الثالث بنقل السطر الأول عمود فنحصل على :

$\boldsymbol{\varphi}$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{u}$	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	0
$\vec{v}$	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\vec{k}$	0	0	1



وعن طريق هذه المصفوفات يمكننا الانتقال بين جمل المحاور .

إيجاد $\overrightarrow{\omega}$ في الجملة الثابتة

عن طريق مصفوفات التحويل نقوم بتحويل u, k إلى الجملة الثابتة

لدينا : $\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{k} \dots\dots (*)$

نكتب عبارة $\vec{u}$ من المصفوفة الأولى : $\vec{u} = \cos\psi\,\overrightarrow{\imath_1} + \sin\psi\,\overrightarrow{\jmath_1}$

ونكتب عبارة $\vec{k}$ من المصفوفة الثانية : $\vec{k} = -\sin\theta\,\overrightarrow{v_1} + \cos\theta\,\overrightarrow{k_1}$

ونحول الشعاع $\overrightarrow{v_1}$ عن طريق المصفوفة الأولى فنجد : $\overrightarrow{v_1} = -\sin\psi\,\overrightarrow{\imath_1} + \cos\psi\,\overrightarrow{\jmath_1}$

بالتعويض في عبارة $\vec{k}$ نجد :

$$\vec{k} = -\sin\theta\,(-\sin\psi\,\overrightarrow{\imath_1} + \cos\psi\,\overrightarrow{\jmath_1}) + \cos\theta\,\overrightarrow{k_1}$$

$$\Longrightarrow \vec{k} = \sin\theta\,.\sin\psi\,\overrightarrow{\imath_1} - \sin\theta\,.\cos\psi\,\overrightarrow{\jmath_1} + \cos\theta\,\overrightarrow{k_1}$$

الآن نعوض قيمة كل من $\vec{u}, \vec{k}$ بعبارة شعاع الدوران نجد :

$$\vec{\omega} = (\theta'\cos\psi + \varphi'\sin\theta\,.\sin\psi)\overrightarrow{\imath_1} + (\theta'\sin\psi - \varphi'\sin\theta\,.\cos\psi)\overrightarrow{\jmath_1}$$
$$+(\psi' + \varphi'\cos\theta)\overrightarrow{k_1}$$

وهي **عبارة شعاع الدوران على الجملة الثابتة** .

ومنه **مركبات شعاع الدوران** هي :

$$\boxed{\begin{aligned} p_1 &= \theta'\cos\psi + \varphi'\sin\theta\,.\sin\psi \\ q_1 &= \theta'\sin\psi - \varphi'\sin\theta\,.\cos\psi \\ r_1 &= \psi' + \varphi'\cos\theta \end{aligned}}$$

ومنه نجد أن مركبات شعاع الدوران على الثابتة $\vec{\omega}(p_1, q_1, r_1)$.

ملاحظات يمكن **التحويل** إلى جملة ثابتة **مباشرة** عن طريق الإسقاط ((مع الرسم)) أوعن طريق مصفوفات التحويل .

مصفوفات التحويل يمكن حفظها واستخدامها مباشرة فهي تساعدنا في حال نسينا عملية الإسقاط .

انتهت المحاضرة

كُن محسناً حتى و إن لم تلقى إحساناً ، ليس لأجلهم بل لأن الله يحب المحسنين

إعداد: محمد علي فليون ** لمى حبشية