تمارين:

1) هل التابع التالي محدب، مقعر، غير ذلك، ولماذا؟

$$f(x,y) = \underbrace{e^x}_{f_1(x)} + \underbrace{2x^2 + 3y^2 + 2xy}_{f_2(x,y)}$$

الحل:

$$f_1(x) = e^x \Rightarrow f_1'(x) = e^x \Rightarrow f_1''(x) = e^x = \nabla^2 f_1(x) \geq 0$$

ملاحظة (8): إذا كانت $f: C \to \mathbb{R}$ تابع للاستقامة حيث C مجموعة محدبة ومفتوحة، فإن f محدب على C إذا وفقط إذا كان $\nabla^2 f(x)$ معرف موجب نصف من أجل كل $x \in C$.

إذاً التابع $f_1(x)$ محدب

$$f_2(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 2xy$$

ملاحظة:

$\nabla^2 f(x) \longrightarrow$ طرق عدد (تابع لمتحول)

$\nabla^2 f(x,y) \longrightarrow$ مصفوفة عددية (تابع لمتحولين)

$\nabla^2 f(x) : x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow$ مصفوفة $n \times n$ عدد (تابع لـ n متحول)

نحسب $\nabla^2 f_2(x,y)$

$$f_{2x} = 4x + 2y \Rightarrow f_{2xx} = 4 \quad , f_{2xy} = 2$$
$$f_{2y} = 6y + 2x \Rightarrow f_{2yy} = 6 \quad , f_{2yx} = 2$$

بالتالي:

$$\nabla^2 f_2(x,y) = \begin{bmatrix} f_{2xx} & f_{2xy} \\ f_{2yx} & f_{2yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

للرجوع فيما اذا كانت المصفوفة سرية موجبة أم لا:

$$\delta^T \nabla^2 f_2 \delta = (\delta_1, \delta_2) \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

$$= 4\delta_1^2 + 2\delta_1\delta_2 + 2\delta_1\delta_2 + 6\delta_2^2$$

$$= 2(2\delta_1^2 + 2\delta_1\delta_2 + 3\delta_2^2)$$

$$= 2(\delta_1^2 + 2\delta_1^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2) \geq 0 \Rightarrow$$

f_2 محدب $\Leftarrow$ $\nabla^2 f_2$ معرف موجب وبالتالي $f = f_1 - f_2$

مجموع توابع محدبة $\Leftarrow$ f تابع محدب

حسب الخاصية (5)

{التركيب الخطي بأمثال موجبة لتابعين محدبين هو تابع محدب}

$\Leftarrow$ التابع f محدب #

تنويه: الكتابة الخاصة المستعرضة في الإطار

مثال: لتكن $C = \{(x,y) \in R^2 : f(x,y) \leq 5\}$ محدبة ولماذا؟

علماً أن $f(x,y)$ تابع محدب و 5 مقدار ثابت.

حسب الخاصة 4 المجموعة C محدبة.

الخاصة 4: إذا كانت C مجموعة محدبة و $f: C \to R$ تابع محدب

فإن:

$$A_1 = \{x \in C : f(x) \leq q\} \text{ و } A_2 = \{x \in C : f(x) < q\}$$

حيث q عدد ثابت فإن A_1 و A_2 محدبتان.

تنويه: كل شيء مستعرض من الخواص يجب أن نبرهن.

Scanned by CamScanner

3) ليكن لدينا $f(x) = \underbrace{e^x}_{f_1} + \underbrace{7x^2 - 3x + 4}_{f_2}$ برهن أن:

$$e^y + 7y^2 - y(14x + e^x) \geq -xe^x + e^x - 7x^2$$

تنويه: لبرهان علاقة تحوي متراجحة نستخدم احدى الخاصة رقم (7).

الحل: حسب الخاصة (7):

لدينا كانت C مجموعة محدبة و $f: C \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق على C

$$\forall x, y \in C: f(y) \geq f(x) + \nabla^T f(x)(y - x) \iff f \text{ محدب}$$

هنا يجب علينا أن نبرهن أن f تابع محدب

بالتعويض بالمتراجحة

وكما ذكرت لكل خاصية نستوردها يجب برهانها

$\oplus$ $f_1(x) = e^x$ تابع محدب (سبق البرهان)

$f_2(x) = 7x^2 - 3x + 4$

$f_2'(x) = 14x - 3$ $\quad f_2''(x) = 14 \geq 0$

$f_2(x)$ محدب $\iff$ الخاصة (8)

f_1, f_2 توابع محدبة $\iff$ الخاصة (5)

f تابع محدب $\iff$ لدينا تركيب خطي بأشكال موجبة لتابعين محدبين هو تابع محدب

f محدب $\iff$ الخاصة (7)

$$f(y) \geq f(x) + \nabla^T f(x)(y - x)$$

$$f(y_1, y_2): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$C \to \mathbb{R}$$

($C = \mathbb{R}^2$ مجموعة محدبة)

Scanned by CamScanner

$$f(y_1,y_2) \geq f(x_1,x_2) + \nabla^T f(x_1,x_2)\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$$

• [متراجحة أساسية يتميز بها المتحولات (x_1,x_2,y_1,y_2)]

التوضيح بالمتراجحة:

لدينا: $f(x) = e^x + 14x - 3$ $\Longrightarrow$ $\nabla f(x) = e^x + 14x - 3$

$\nabla^T f(x) = e^x + 14x - 3$

نعوض في $*$:

$$e^y + 7y^2 - 3y + 4 \geq e^x + 7x^2 - 3x + 4 + (e^x + 14x - 3)(y - x)$$

$$e^y + 7y^2 - 3y + 4 \geq e^x + 7x^2 - 3x + 4 + e^x y + 14xy - 3y - e^x x - 14x^2 + 3x$$

$$e^y - 7y^2 - e^x y - 14xy \geq e^x + 7x^2 - xe^x - 14x^2$$

$$e^y - 7y^2 - y(e^x + 14x) \geq e^x - 7x^2 - xe^x$$

هو المطلوب.

المسائل الأمثلية: هدفنا أن نجد حلاً لهذه المسألة:

1- المتحولات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ سنفرض لدينا n متحول

مثلاً: شركة تريد أن تجد الحل الأمثل من كل نوع يجب أن تصنع ليكون لديها أكبر ما يمكن

مثلاً: عدد نوع السيارات المطلوب: 3 $\Longleftarrow$ المتحولات = 3

2- دالة الهدف:

$$\min_{x \in X} f(x) \quad \text{أو} \quad \max_{x \in X} f(x)$$

حيث $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$

X: مجموعة ما يمكن أن تكون محددة أو غير محددة حسب المسألة

Scanned by CamScanner

شروط المسألة:

مثلاً: لدى زجاج محدد يجب استخدام كل الزجاج بحيث لا يتجاوز الزجاج المطلوب لدي زبون عليه محدد مثلاً، يجب زبون الأول لا يتجاوز المطلوب

* شروط المسألة لها عدة أشكال:

$g_i(x): X \longrightarrow R$ حيث $g_i(x) \leq b_i \quad i \in I$

$g_k(x): X \longrightarrow R$ حيث $g_k(x) \geq b_k \quad k \in K$

$g_l(x): X \longrightarrow R$ حيث $g_l(x) = b_l \quad l \in L$

حيث b_j مقادير ثابتة تمثل حدود الشرط

شرط عدم السلبية: $x_p \geq 0 \quad p \in P$

مثلاً: $x_1 = -3$ أي أنتج 3- سيارة (غير مقبول)

يجب أن تكون المتغيرات صحيحة لا يمكن أن أنتج (2.4) سيارة

المسألة الأمثلية لها الشكل التالي:

دالة الهدف $\min_{x \in X} f(x)$

شروط المسألة

$$\text{S.t} \quad \begin{cases} g_i(x) \leq b_i & i \in I \\ g_k(x) \geq b_k & k \in K \\ g_l(x) = b_l & l \in L \\ x_p \geq 0 & p \in P \end{cases}$$

The end

٨-٨

Alnour

Scanned by CamScanner