◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄المحاضرة: العاشرة عنوان المحاضرة: حل مسائل

أهلا بكم أصدقائي في هذه المحاضرة سنورد حل بعض المسائل ..

المسألة الأولى

يتحرك قضيب (oA) طوله (ℓ) في الفراغ بحيث تبقى نهايته (o) ثابتة تتعين حركته بدلالة زوايا أولر

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \quad , \theta = \sin t \quad , \psi = t$$

عين شعاع الدوران الآني وشعاع التسارع الزاوي ومخروطي القاعدة والمتدحرج وسرعة نهاية القضيب (A) وتسارعه .

الحل

شعاع الدوران في الجملة الثابتة

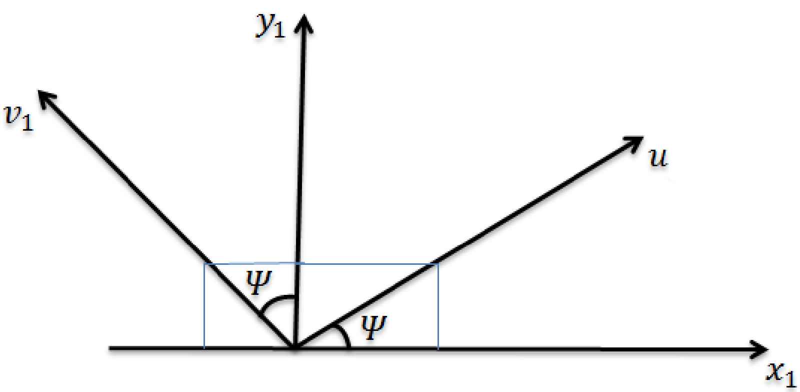
نعلم أن علاقة شعاع الدوران تعطى بالعلاقة :

$$\vec{\omega} = \psi' \overrightarrow{k_1} + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{k}$$

وبما أن $\psi' = 1 \quad , \quad \theta' = \cos t \quad , \quad \varphi' = 0$ من نص المسألة فنجد :

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{k_1} + \cos t \, \vec{u}$$

ولأننا في الجملة الثابتة علينا ايجاد المتجه $\vec{u}$ بالإسقاط او عن طريق مصفوفات التحويل ....



$$\vec{u} = \cos\psi \, \overrightarrow{\iota_1} + \sin\psi \, \overrightarrow{J_1}$$

وبالتعويض نجد :

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{k_1} + \cos t \, (\cos\psi \, \overrightarrow{\iota_1} + \sin\psi \, \overrightarrow{J_1})$$

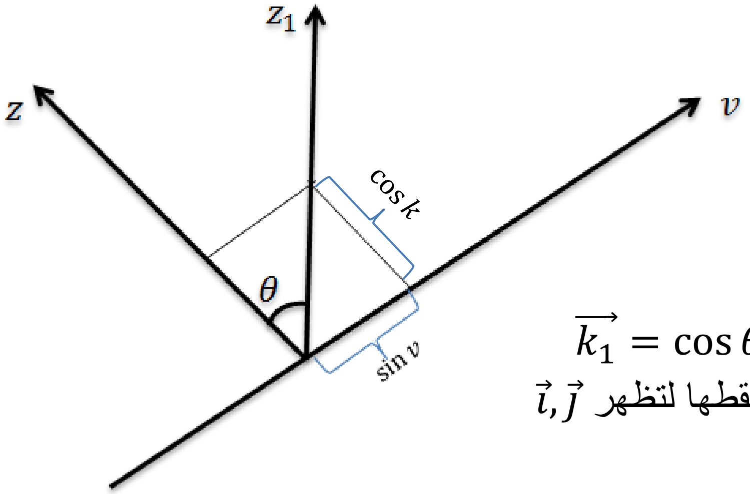
وبتعويض $\psi = t$ نجد :

$$\boxed{\vec{\omega} = \cos^2 t \, \overrightarrow{\iota_1} + \cos t \sin t \, \overrightarrow{J_1} + \overrightarrow{k_1}}$$

شعاع الدوران في الجملة المتماسكة

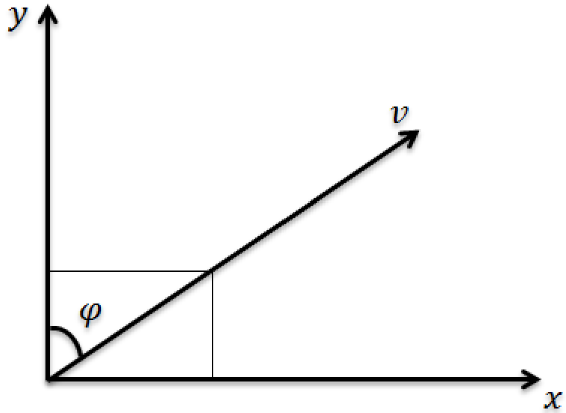
$$\vec{\omega} = \overrightarrow{k_1} + \cos t\, \vec{u}$$

علينا هنا ايجاد كل من $\overrightarrow{k_1}, \vec{u}$ في الجملة المتماسكة أي علينا الاسقاط على جملة المحاور (xyz) أو عن طريق مصفوفات التحويل



$$\overrightarrow{k_1} = \cos\theta\, \vec{k} + \sin\theta\, \vec{v}$$

لم تتحول $\overrightarrow{k_1}$ إلى الجملة المتماسكة لظهور $\vec{v}$ ايضاً نسقطها لتظهر $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$



$$\vec{v} = \sin\varphi\, \vec{\imath} + \cos\varphi\, \vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{k_1} = \cos\theta\, \vec{k} + \sin\theta\, (\sin\varphi\, \vec{\imath} + \cos\varphi\, \vec{\jmath})$$

بتعويض قيمة كل من $\varphi = \frac{\pi}{4}, \theta = \sin t$ نجد

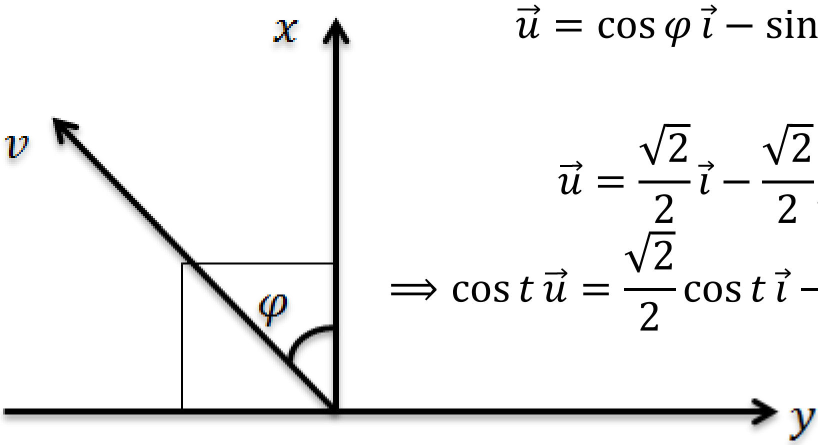
$$\Longrightarrow \overrightarrow{k_1} = \cos\sin t\, \vec{k} + \sin\sin t\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}\right)$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{k_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sin t\, \vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sin t\, \vec{\jmath} + \cos\sin t\, \vec{k}$$

لايجاد $\vec{u}$ نسقط ايضاً على الجملة المتماسكة

$$\vec{u} = \cos\varphi\, \vec{\imath} - \sin\varphi\, \vec{\jmath}$$

بتعويض قيمة $\varphi = \frac{\pi}{4}$ نجد



$$\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$$

$$\Longrightarrow \cos t\, \vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\, \vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\, \vec{\jmath}$$

بتعويض كل من $\overrightarrow{k_1}$, $\vec{u}$ في العلاقة العامة لشعاع الدوران نجد :

$$\vec{\omega}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sin t\,\vec{\imath}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sin t\,\vec{\jmath}+\cos\sin t\,\vec{k}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\,\vec{\imath}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{\omega}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sin t+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)\vec{\imath}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sin t-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)+\cos\sin t\,\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \vec{\omega}=p\vec{\imath}+q\vec{\jmath}+r\vec{k}$$

بحيث :

$$\begin{cases} p=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sin t+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \\ q=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sin t-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \\ r=\cos\sin t \end{cases}$$

وهي مركبات شعاع الدوران على الجملة المتماسكة

التسارع في جملة ثابتة

وهو مشتق $\vec{\omega}$ في الجملة الثابتة

$$\vec{\varepsilon}=-2\cos t\sin t\,\overrightarrow{\imath_1}+(-\sin^2 t+\cos^2 t)\overrightarrow{\jmath_1}$$

ايجاد مخروط المتدحرج " يعني ايجاد معادلة الحركة في الجملة المتماسكة "

نفرض النقطة $M(x,y,z)$ بحيث $\overrightarrow{oM}\parallel\vec{\omega}$ $\quad \forall\ M\in\Delta$

من شرط التوازي $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}$

$$\frac{x}{\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sin t+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t}_{1}}=\frac{y}{\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sin t-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t}_{2}}=\frac{z}{\underbrace{\cos\sin t}_{3}}$$

نأخذ (1) و (3)

$$x.\cos\sin t=z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sin t+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)\ldots(*)$$

وبأخذ (2) و (3)

$$y.\cos\sin t=z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sin t-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)\ldots(**)$$

المعادلات الوسيطية للمتدحرج

بتربيع و جمع كل من العلاقتين $(*)$ و $(**)$ نجد :

$$x^2.\cos^2 \sin t + y^2.\cos^2 \sin t = \frac{z^2}{2}(2\sin^2 \sin t + 2\cos^2 t)$$
$$\Longrightarrow (x^2+y^2)\cos^2 \sin t = z^2(\sin^2 \sin t + \cos^2 t)$$

ايجاد مخروط القاعدة " يعني ايجاد معادلة الحركة في الجملة الثابتة "

نفرض $M(x_1,y_1,z_1)$ بحيث $\overrightarrow{oM}//\vec{\omega} \quad \forall\ M\in\Delta$

من شرط التوازي $\frac{x_1}{p_1}=\frac{y_1}{q_1}=\frac{z_1}{r_1}$

$$\underbrace{\frac{x_1}{\cos^2 t}}_{1}=\underbrace{\frac{y_1}{\cos t\,.\sin t}}_{2}=\underbrace{\frac{z_1}{1}}_{3}$$

من (1) و (3) نجد :

$$z_1\cos^2 t = x_1 \Longrightarrow \cos^2 t=\frac{x_1}{z_1}\Longrightarrow \cos t=\sqrt{\frac{x_1}{z_1}}\ldots.(\#)$$

$$\sin^2 t = 1-\cos^2 t \Longrightarrow \sin t=\sqrt{1-\frac{x_1}{z_1}}\ldots(\#\#)$$

من (2) و (3) نجد :

$$z_1\cos t\,.\sin t = y_1 \ldots(@)$$

نعوض قيمة كل من(#) و (##) في (@)

$$y_1 = z_1\sqrt{\frac{x_1}{z_1}}.\sqrt{1-\frac{x_1}{z_1}}$$

وهي معادلة القاعدة .

تعيين السرعة

$$\vec{v}(A)=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oA}=\begin{vmatrix}\vec{\imath_1} & \vec{J_1} & \vec{k_1}\\ \cos^2 t & \cos t\,.\sin t & 1\\ x_A & y_A & z_A\end{vmatrix}$$

التسارع :

$$\vec{\Gamma}(A)=\vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{oA}+\vec{\omega}\wedge\vec{v}(A)$$

$$\vec{\Gamma}(A)=\begin{vmatrix}\vec{\imath_1} & \vec{J_1} & \vec{k_1}\\ -2\cos t\,.\sin t & -\sin^2 t+\cos^2 t & 0\\ x_A & y_A & z_A\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{\imath_1} & \vec{J_1} & \vec{k_1}\\ p_1 & q_1 & r_1\\ v_{x_1}(A) & v_{y_1}(A) & v_{z_1}(A)\end{vmatrix}$$

المسألة الثانية

يتحرك جسم صلب (s) في الفراغ بحيث تبقى النقطة (o) ثابتة منه , $(oxyz)$ جملة إحداثيات متعامدة ومباشرة متماسكة مع (s) فإذا كانت مركبات متجهة السرعة للنقطة $M_1(0,0,2)$ على الجملة المتماسكة $\vec{v}(M_1) = (t, 2t^2, 0)$ والنقطة $M_2(0,1,2)$ هي $\vec{v}(M_2) = (-2,2,-1)$ ، **والمطلوب :**
عين المحور الآني للدوران وشعاع الدوران وشعاع التسارع الزاوي والمعادلة الديكارتية للمتدحرج .

الحل:

في جملة متماسكة

$$\vec{v}(M_1) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM_1} \quad \Rightarrow \vec{v}(M_1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (t, 2t^2, 0) = (2q, -2p, 0)$$

بالمطابقة نجد

$$t = 2q \Rightarrow \frac{t}{2} = q$$
$$2t^2 = -2p \Rightarrow p = -t^2$$

$$\vec{v}(M_2) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM_2} \quad \Rightarrow \vec{v}(M_2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

ايضاً بالمطابقة نجد :

$$\Rightarrow (-2,2,-1) = (2q - r, -2p, p)$$
$$-2 = 2q - r \Rightarrow -2 = t - r \Rightarrow r = t + 2$$
$$2 = -2p \Rightarrow p = -1$$
$$\Rightarrow \vec{\omega} = \left(-1, \frac{t}{2}, t + 2\right)$$

بالاشتقاق المباشر لـ $\vec{\omega}$ نجد :

$$\vec{\varepsilon} = (0\,, \frac{1}{2}\,, 1)$$

تعيين المحور الآني

بفرض $M(x,y,z)$ بحيث $\overrightarrow{oM} // \vec{\omega} \qquad \forall \ M \in \Delta$

من شرط التوازي $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$

$$\frac{x}{\underbrace{-1}_{1}} = \frac{2y}{\underbrace{t}_{2}} = \frac{z}{\underbrace{t+2}_{3}}$$

من العلاقة (1) و (2) نجد :

$$xt = -2y \ldots (*)$$

من العلاقة (1) و (3) نجد :

$$xt + 2x = -z \ldots (**)$$

من العلاقة $(*)$ نجد :

$$t = \frac{-2y}{x}$$

$$\Longrightarrow \; -2y + 2x = -z$$

وهي المعادلة الديكارتية للمتدحرج .

مسألة وظيفة

صفيحة دائرية مركزها (o) ثابت نصف قطرها (a) تستند بنقطة (A) من محيطها إلى مستوي ثابت (ox_1y_1) ، **والمطلوب :**

1- عين الإحداثيات المعممة للصفيحة , وشعاع الدوران الآني بدلالة هذه الإحداثيات ومشتقاتها بالنسبة للزمن .

2- بفرض أن نقطة التماس (A) تدور حول المحور (o_1z_1) بسرعة قيمتها $\vec{v}(\mathrm{A}) = \frac{\sqrt{3}}{2}t$ وقيمة شعاع الدوران $|\vec{\omega}| = 1$,عين معادلات حركة الصفيحة ثم عين سرعة نقطة ما من الصفيحة وتسارعها .

3- بفرض ان الصفيحة تتدحرج دون انزلاق على المستوي (ox_1y_1) ,عين المحور الآني للدوران والقاعدة والمتدحرج .

انتهت المحاضرة

أيحسب الصّبّ أنّ الحبّ منكتم ...
ما بين منسجم منه ومضطّرم

إعداد: محمد علي فليون ** هدى حبشية