نظري

◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة : الثامنة

عنوان المحاضرة: معادلات التفاضلية التامة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-تكملة للمعادلات التفاضلية التامة(طريقة جديدة).

2-أمثلة عن حل المعادلات التفاضلية التامة.

المعادلات التفاضلية التامة

وجدنا في المحاضرة السابقة أن الشرط حتى تكون المعادلة تامة هي ان تكون:

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$$

و الحل العام لها هو من الشكل:

$$f(x,y) = c$$

طريقة إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة بالطريقة العامة:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi(y)$$

حيث أن $\varphi(y)$ دالة تابعة ل y فقط فنوجدها حتى يتحقق الشرط المطلوب:

$$\frac{\partial \mathrm{F(x,y)}}{\partial \mathrm{y}} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y).\,dx}{\partial y} + \ \varphi'(y) = N(x,y)$$

وبما أنّ المعادلة التفاضلية تامة فإنّ:

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} . dx + \varphi'(y) = N(x,y)$$

$$[N(x,y)]_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x,y)$$

$$N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y) = N(x,y) \Rightarrow N(x_0,y) = \varphi'(y)$$

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y) . dy + c_1$$

$$\boxed{F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y) . dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y) . dy}$$

حيث أن (x_0 , y_0) نقطة اختيارية بشرط أن تنتمي إلى ساحة تعريف الدالتين

$$M(x,y), N(x,y)$$

بطريقة مشابهة(حيث يمكن أن نأخذ الدالة الأسهل للتكامل):

$$F(x,y) = \int_{y_0}^{y} N(x,y)dx + \varphi(x)$$

حيث $v(x)$ دالة تابعة ل x فقط

$$\frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{x}} = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} . dy + \ \varphi'(x) = M(x,y)$$

و بما أنّ المعادلة التفاضلية تامة فإنّ:

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}.dy + \varphi'(x) = M(x,y)$$

$$[M(x,y)]_{y_0}^{y} + \varphi'(y) = M(x,y)$$

$$M(x,y) - M(x_0,y) + \varphi'(y) = M(x,y) \Rightarrow M(x_0,y) = \varphi'(x)$$

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} M(x_0,y).dx + c_1$$

ومنه

$$\boxed{F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y).dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y).dy}$$

و هو الحل العام.

◄**ملاحظة:** لقد قال الدكتور بأنّ النظري هام للامتحان و ليس بالضرورة أن يأتي تمرين.

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية:

$$(3x^2 + 6xy^2).dx + (6x^2y + 4y^3).dy = 0$$

الحل:

نبرهن أنّها تامة:

$$\begin{cases} M(x,y) = 3x^2 + 6xy^2 \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = 12xy \\ N(x,y) = 6x^2y + 4y^3 \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = 12xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

الشرط محقق إذاً المعادلة التفاضلية تامة , والحل العام من الشكل: $F(x,y) = C$

لإيجاد الحل العام يجب إيجاد الدالة $F(x,y)$, لنأخذ:

$$F(x,y) = \int M(x,y).dx + \varphi(y)$$

$$= \int (3x^2 + 6xy^2).dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = N(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3 \Rightarrow \varphi'(y) = 4y^3 \overset{\text{تكامل}}{\Longrightarrow} \varphi(y) = y^4 + c$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C}$$

وهو الحل العام.

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}.\boldsymbol{dy} - \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x^2}}.\boldsymbol{dx} = \mathbf{0}$$

الحل:

نبرهن أنّها تامة:

$$\begin{cases} M(x,y) = -\dfrac{y}{x^2} \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = -\dfrac{1}{x^2} \\ N(x,y) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ومنه فالشرط محقق إذاً المعادلة تامة.

والحل العام من الشكل: $F(x,y) = C$

لإيجاد الحل العام يجب إيجاد الدالة $F(x,y)$, لنأخذ:

$$F(x,y) = \int M(x,y).dx + \varphi(y) = \int -\frac{y}{x^2}.dx + \varphi(y) = \frac{y}{x} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x} + \varphi'(y) = N(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x} + \varphi'(y) = \frac{1}{x} \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x,y) = \frac{y}{x} = C}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

$$(3ye^{3x} - 2x)dx + e^{3x}\, dy = 0$$

الحل:

$$M(x,y) = 3ye^{3x} - 2x \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 3e^{3x}$$

$$N(x,y) = e^{3x} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3e^{3x}$$

أي أنّ المعادلة التفاضلية تامة و لنوجد الآن الحل العام:

$$f(x,y) = \int N(x,y).\, dy + \varphi(x)$$

$$= \int e^{3x} dy + \varphi(x)$$

$$= y.\, e^{3x} + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3ye^{3x} + \varphi'(x) = 3ye^{3x} - 2x$$

$$\varphi'(x) = -2x \overset{\text{تكامل}}{\Longrightarrow} \varphi(x) = -x^2$$

و منه فإنّ الحل العام يكون:

$$f(x,y) = ye^{3x} - x^2 = c$$

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصر الله و ياسين الحلبي و رهف النقشي