◄ دكتورة المادة: رشا بعاج

◄ المحاضرة: التاسعة

♈مرحبا اصدقائي♈

نتابع بحل المعادلات غير الخطية والطرق المجالية بعد ان تحدثنا عن طريقة تنصيف المجال وطريقة الوضع الخاطئ وطريقة نيوتن وطريقة القاطع سنكمل مع طريقة **النقطة الثابتة.**

طريقة النقطة الثّابتة(التّكراريّة)

تختلف هذه الطريقة عن الطرق السابقة بأنها تبدأ من الدالة $f(x) = 0$

للحصول على الشكل $x = g(x)$ ثم نستخدم هذه المعادلة بالحصول على الدستور التكراري $x_{n+1} = g(x_n)$

يوجد عدد كبير من النّظريات والمبرهنات التي درست الطّريقة والتي درست التّقارب فيها

مبرهنة: (هذه المبرهنة للفهم فقط)

نفرض أن $g(x)$ و $g'(x)$ دالتان مستمرتان ومعرفتان على المجال [a,b] بحيث يتحقق للدالة $g(x)$ العلاقة :

$$\alpha - X_{n+1} = -\frac{1}{2}(\alpha - X_n)(\alpha - X_{n-1})\frac{g''(\xi)}{g'(\xi)}$$ (ξ : كساي)

$$\min\{\alpha, X_n, X_{n-1}\} \le \xi_n \quad , \quad \xi_n \le \max\{\alpha, X_n, X_{n-1}\}$$

هذا المقدار محصور بين أكبر عدد وأصغر عدد.

بفرض $\lambda = \max|g'(x)| < 1$ حيث $a \le x \le b$

حيث α هو الجذر الفعلي للدالة

عندئذ يوجد حل وحيد α للمعادلة $g(x) = x$ على المجال [a,b] تتقارب القيم التكرارية x_n من الجذر α أياً كانت القيمة التقريبية الابتدائية x_0 من المجال $[a, b]$

مثال: أوجد القيمة التقريبيّة للعدد $\alpha = \sqrt{5} = 2,2361$ بطريقة النقطة الثابتة:

$$x = \sqrt{5} \quad , \quad x_0 = 2,5 \quad , \quad x^2 = 5 \quad => \quad f(x) = x^2 - 5$$

في بعض الأحيان تكون $f(x)$ مجهولة لذلك يتوجب علينا إيجادها .

$x_{n+1} = g(x_n) \Longleftarrow f(x) = 0$

نفرض أربع طرائق تكرارية لحل هذه المعادلة ، لنفرض أن الشكل الأول :

$I_1: \ x_{n+1} = 5 + x_n - x_n^2$ ضربنا بـ (-١) ونضيف (x_n) للطرفين

$I_2: \ x_{n+1} = \frac{5}{x_n}$ نقسم على (x_n)

$I_3: \ x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{5}x_n^2$ نضرب الطرفين بـ $(-\frac{1}{5})$ ونضيف (x_n)

$I_4: \ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$ نضيف (x_n^2) للطرفين وبعدها نقسم على (x_n) وامثالها

ملاحظة: استعملنا (x_n) للحالة العامة وإلا إذا وضعنا (x) ليس خطأ

بدأنا ب $x_0 = 2.5$ لأنها قريبة من الجذر على المجال [2,3]

n	$x_n: I_1$	$x_n: I_2$	$x_n: I_3$	$x_n: I_4$
0	2.5	2.5	2.5	2.5
1	1.25	2	2.25	2.25
2	4.6875	2.5	2.2375	2.2361111
3	−12.285156	2	2.236288	2.236068
	(متباعدة)	(متناوبة فهي متباعدة)	(متقاربة)	(متقاربة)

ملاحظة: ليست كلّ دالة يمكن أن نحصل عليها من الشّكل $x = g(x)$ ستعطي نتائج لذلك ممكن أن نحصل على دالة g بطريقة تؤدي إلى نتائج متباعدة وبالتالي أنّ الدالة المستخدمة هي دالة فاشلة لا تعطي الحلّ المطلوب

- هذه الطّريقة تعتمد عليها الكثير من الأبحاث

معيار النقطة الثابتة : المعيار هو أن نأخذ $\max|g'(x)| < 1$ إذا تحقق الشرط فالدالة هي دالة مناسبة.

شرط تقارب طريقة النقطة الثابتة:

إذا كان $a \le x \le b$ $\lambda = \max|g'(x)| < 1$

فإن القيمة التكرارية x_n تتقارب بشكل خطي من أجل أي قيمة ابتدائية x_0 من المجال [a,b] في هذه الحالة

إذا كان $max|g'(x)| > 1$ عندها لا تتقارب الطريقة التكرارية أما عندما $max|g'(x)| = 1$ لا يمكن الجذم بعدم التقارب.

تعريف : نقول ان المتتالية $\{X_n\}_{n\ge0}$ متقاربة من α بمرتبة تقارب $p \ge 1$ إذا تحقق الشرط:

$|\alpha - X_{n+1}| \le c|\alpha - X_n|^p$ وذلك من اجل $c \ge 0$

حيث P مرتبة التقارب و c ثابت التقارب ١- اذا كان P=1 نقول انها خطية....

٢-اذا كان P=2 نقول انها تربيعية ..... -٣- اذا كان P=3 نقول انها تكعيبية ، وهكذا....

نستنتج أن $|E_{n+1}| \le c\,|E_n|^p$

مقارنة بين الطّرق المجاليّة الخمس

الطّريقة	مرتبة التّقارب (p)	ثابت التّقارب(c)	ملاحظات تخصّ الطّريقة
تنصيف المجال	1	لا يوجد قانون لحساب هذا الثابت	$E_n = \dfrac{b-a}{2^n}$
الوضع الخاطئ	تسمّى مرتبة التّقارب فوق الخطيّة $p > 1$	لا يوجد قانون لحساب هذا الثابت	إيجاد الخطأ الأعظمي معقد
القاطع	$p = 1.62$ أو $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\left[\dfrac{f''(x)}{2f'(x)}\right]^{p-1}$ حيث (x) هي قيمة الجذر التّقريبي	$E_{n+1} = \dfrac{1}{2}(E_n)(E_{n-1})\left(\dfrac{f''}{f'}\right)$
نيوتن	2	$\dfrac{f''}{2f'}$	لا يوجد ملاحظة على قيمة الخطأ
النّقطة الثّابتة	1	$\lambda = \max\|g'(x)\|$ حيث (x) هي قيمة الجذر التقريبي	$E_n = \left(\dfrac{\lambda^n}{1-\lambda}\right)E_0$ حيث $E_0 = \|x_1 - x_0\|$ λ التي في المقام هي $\max\|g'(x)\|$

ملاحظة: قمنا بتصنيف الطرق أيهم أسرع وذلك بالاعتماد على منطقة التقارب فيكون :

١- طريقة نيوتن
٢- طريقة القاطع
٣- طريقة الوضع الخاطئ
٤- طريقة تنصيف المجال – وطريقة النقطة الثابتة

عادة نحسب ثابت التقارب عند آخر جذر يتم إيجاده أو أن ثابت التقريب ليس له علاقة بال x (تظهر قيمة ثابتة)

- متى نقارن بين سرعة تقارب الطرق ؟؟
نقارن سرعة التقارب بين الطرق القابلة للتطبيق فتكون الطريقة الأسرع هي صاحبة مرتبة التقارب الاكبر

مثال شامل عن كل شيء تتضمّنه طريقة النّقطة الثابتة:

لتكن لدينا الدالة $g(x) = \sqrt{3x+4}$ والمطلوب:

١) أثبت أنّ $x = 4$ نقطة ثابتة للدالّة السابقة

٢) هل تمثّل $g(x)$ دالّة تكرار على المجال $[2,5]$
٣) ما هي مرتبة التّقارب
٤) ما هو ثابت التّقارب
٥) أوجد x_1, x_2 من أجل $x_0 = 3$
٦) احسب الخطأ المرتكب في حساب x_{24}

الحل: ١) إذا تحقق أنّ $x = g(x)$ من أجل $x = 4$ فتكون $x = 4$ نقطة ثابتة بالنّسبة للدّالة

نعوض: $4 = \sqrt{3(4)+4}$

$4 = \sqrt{16} \Leftarrow x = 4$ نقطة ثابتة للدالة $g(x)$

إذاً النّقطة $(4,4)$ تنتمي لمنحني الدالة

٢) إنّ المشتق $g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$ سندرس إشارته والجذر دائماً أكبر أو يساوي الصفر

$\Leftarrow$ المقام متزايد وكلّما كبر المقام تناقصت الدالة

$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$ الدّالة متناقصة على المجال $[2,5]$ بما أن الدالة متناقصة نعوض بالقيمة 2 وأما إذا كانت متزايدة نعوض بالقيمة 5 وهنا الدالة متناقصة $g'(2) = \frac{3}{2\sqrt{10}} < 1$

إذاً الدّالّة g هي دالّة تكرار

٣) مرتبة التّقارب $p = 1$

٤) ثابت التّقارب $c = max|g'(x)|$

$c = \lambda = \frac{3}{2\sqrt{10}}$ (لا يوجد x لأن القانون فيه القيمة العظمى على المجال)

٥) $x_0 = 3$

$$x_n = g(x_{n-1})$$

$$x_1 = \sqrt{3(3)+4} = \sqrt{13} = 3{,}60555$$

$$x_2 = \sqrt{3(\sqrt{13})+4} = 3{,}8492$$

٦) لحساب الخطأ المرتكب في طريقة النّقطة الثّابتة نطّبق

$$E_{24} = \left(\frac{\lambda^{24}}{1-\lambda}\right) E_0$$

حيث λ التي في المقام هي $\max|g'(x_2)|$

$$E_0 = |x_1 - x_0| = 3{,}60555 - 3 = 0{,}60555$$

$$E_{24} = 1{,}492595.10^{-10}$$

إذا آتى طلب (٥) بدون طلب (٢) يجب إيجاد الطلب (٢) وإثبات أنها دالة تكرار إلا إذا كان موجود بالفرض أنها دالة تكرار

الآن أصبح لدينا تمرين متكامل على هذا البحث

حل الوظائف

التمرين الأول: لتكن الدّالة $f(x) = e^x - 2$ ومن أجل $x_0 = 0.5$ والمطلوب:

١) أوجد x_3, x_2, x_1 الجذور التقريبية الناتجة عن طريقة نيوتن؟ أي الجذر التّقريبي المطلوب هو x_3 وقد علمنا هذا من نص السؤال

٢) ما هي مرتبة التّقارب؟

٣) ما هو ثابت التّقارب؟

٤) احسب الخطأ الأعظمي المرتكب بكل منها .

الحل:

١) نطبق قانون نيوتن : $x_{(n)} = x_{n-1} - \left[\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n}-1)}\right]$

لكن علينا أولا إيجاد $f(x) = e^x - 2$ و $f'(x) = e^x$, حيث : $x_0 = 0,5$

$$x_1 = x_0 - \left[\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right] = 0.5 - \left[\frac{e^{0.5} - 2}{e^{0.5}}\right] = 0.713063194$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0,5	$-0,3512787293$	1,648721271	
1	0,7130613194	0,04022749621	2,04022749	0,2130613194
2	0,6933441573	$3,9399233.10^{-4}$	2,000393992	0,0197171621
3	0,6931471999	$3,8748734.10^{-8}$	2,000000039	$1,969574.10^{-4}$

٢) مرتبة التقارب $p = 2$ (من الجدول)

٣) ثابت التقارب $c = \frac{f''}{2f'}\ \frac{e^x}{2e^x} = \frac{e^{0.6931471999}}{2e^{0.6931471999}} = \frac{1}{2} = 0,5$

٤) $|x_n - x_{n-1}| = |0.6933117458 - 0.01803241155|$

$= 0.0180324115$

التمرين الثاني : لتكن الدّالة $f(x) = x - \cos(x)$ استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حل بدقة $\varepsilon_x = 10^{-4}$ على المجال $[0, \frac{\pi}{2}]$ من أجل $x_0 = 0.5$ على المجال $[0, \frac{\pi}{2}]$

١) ماهي مرتبة التّقارب ؟
٢) ما هو ثابت التّقارب؟
٣) أوجد الخطأ الأعظمي المرتكب في حساب الجذر المطلوب

الحل:

١) $p = 2$

٢) $c = \frac{f''}{2f'}$ (ملاحظة عند حساب c نعوض آخر قيمة لل x_n) لدينا الدالة $f(x) = x - \cos(x)$

نشتق الدالة $f(x)$ $\quad f'(x) = 1 + \sin(x)$

$$f''(x) = \cos(x)$$

الآن نعوض بقانون (c)

$$c = \frac{\cos x}{2(1 + \sin x)} = \frac{\cos(0,7390851339)}{2(1 + \sin(0,7390851339))} = 1.008764946$$

٣) لإيجاد الخطأ الأعظمي ننشأ الجدول التالي:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	0,5	$-0,3775825619$	1,479425539	
1	0,755222417	0,02710331175	1,685450632	0,2255222417
2	0,7391416661	$9,461531445.10^{-5}$	1,673653811	0,0160807509
3	0,7390851339	$1,1636787.10^{-9}$	1,000000001	$5,65322.10^{-5}$

نتوقف عند التكرار الثالث لان $x_3 = 0,7390851339$ هو الجذر التقريبي المطلوب

حيث $\quad 5,65322.10^{-5} < \varepsilon_x = 10^{-4}$

التمرين الثالث:

- لتكن كثيرة الحدود الآتية : $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$ جذران حقيقيان في المجال $[0,1]$, $[-1,0]$ أوجد تقريب لهذين الجذرين بدقة $\varepsilon = 10^{-6}$ مستخدما : طريقة الوضع الخاطئ وطريقة القاطع وطريقة نيوتن استخدم طريقة المجال تقريبا اوليا ل طريقة الوضع الخاطئ وطريقة القاطع ونقطة المنتصف تقريبا اوليا ل طريقة نيوتن

طريقة الوضع الخاطئ:

أولا: على المجال $[-1,0]$ حيث $x_1 = 0$, $x_0 = -1$, $\varepsilon = 10^{-6}$

كيفية الحل نوجد الجدول باستخدام القوانين: $x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0} f_1$

$$\lambda = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} \qquad E_{max} = \left|\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right| . |x_n - x_{n-1}|$$

ثم يتوقف الجدول عندما يتحقق الشرط $E_{max} \le \varepsilon = 10^{-6}$

ثانيا : وعلى المجال $[0,1]$ الحل بنفس الطريقة حيث : $x_1 = 1$, $x_0 = 0$

نوجد الجدول ونتوقف عندما يصبح الخطأ الأعظمي $\varepsilon >$

طريقة القاطع : على المجال $[-1,0]$ نقول $x_1 = 0$, $x_0 = -1$ ولدينا $\varepsilon = 10^{-6}$

كيفية الحل نوجد الجدول باستخدام القانون $x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} f(x_{n-1})$

وللخطأ الاعظمي نحسب كالتالي $E_{max} = |x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon = 10^{-6}$

وعلى المجال $[0,1]$ الحل بنفس الطريقة حيث $x_0 = 0 , x_1 = 1$ نوجد الجدول ونتوقف عندما يصبح الخطأ الاعظمي $\varepsilon >$

وطريقة نيوتن: (حيث نقطة منتصف المجال هي التقريب الاولي)....

أولا: على المجال [-1,0] منتصف هذا المجال هي النقطة -0,5 وهي التقريب الاولي ومنه $x_0 = -0,5$ ونوجد الجدول

اعتمادا على القانون $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ وللخطأ الاعظمي $E_{max} = |x_n - x_{n-1}|$ ويتوقف الجدول عندما يتحقق الشرط $E_{max} \le \varepsilon = 10^{-6}$

ثانيا: على المجال [0,1] منتصف هذا المجال هي النقطة 0,5 وهي التقريب الاولي ومنه $x_0 = 0,5$ ونوجد الجدول اعتمادا على القوانين السابقة ويتوقف الجدول عندما يتحقق الشرط $E_{max} \le \varepsilon = 10^{-6}$

التّمرين الرابع:

- استخدم طريقة النقطة الثّابتة لإيجاد جذر تقريبي للدالة:

$f(x) = x^3 - \sin(x)$ علماً أنّ: $x_0 = 1$ على المجال $[0, \frac{\pi}{2}]$ حيث :

$$I_1 : x = \sqrt[3]{\sin(x)} \quad , \quad I_2 : x = x + \sin(x) - x^3 \quad , \quad I_3 : \; x = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

n	$x: I_1$	$x: I_2$	$x: I_3$
0	1	1	1
1	0,9440892412	0,8414709848	0,8414709848
2	0,9321556069	0,9912718899	1,053032246
3	0,9294407446	0,8539515207	0,7836108635
4	0,9288147207	0,9851041909	1,149493454
5	0,9286699211	0,8624589572	0,6906324036

(متقاربة تستتر حتى تصل إلى الجذر) (متناوبة لا يمكن إيجاد الجذور من خلالها) (متباعدة)

انتهت المحاضرة

<u>**إعداد:راما جوهر & هديل سعيد & علا الدالاتي**</u>