◄ دكتور المادة: جمال المللي

◄ المحاضرة الثانية عشر   عنوان المحاضرة: الفضاءات التامة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- الفضاء $C[a,b]$ غير تام بخصوص مترك اخر

بسم الله الرحمن الرحيم

درسنا في محاضرات سابقة الفضاء $C[a,b]$ وأثبتنا أن هذا الفضاء تاماً بخصوص تبولوجيا معينة معرفة عليه ، ولكن إذا غيرنا هذه التبولوجيا يمكن أنه يصبح هذا الفضاء غير تاماً وهذا ما سندرسه في محاضرتنا اليوم ..

الفضاء $C[0,1]$: (وهي مجموعة كل الدوال الحقيقة المستمرة على المجال $[0,1]$)

ولنعرف على هذه المجموعة المترك d بالشكل التالي :

$$d(x,y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|\,d(t)\quad ,\forall x,y\in C[0,1]$$

-هذا الطرف موجود لأن x,y دوال مستمرة بالتالي جمع دوال مستمرة هي دالة مستمرة تركيب دوال مستمرة هي دالة مستمرة وبالتالي قابل للمكاملة.

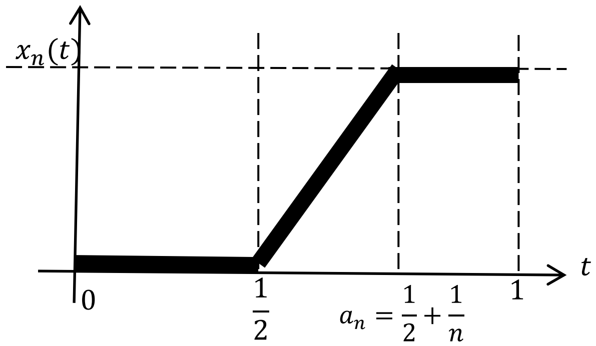
-إن الزوج $(C[0,1],d)$ هو فضاء متري (وضوحاً) ولنثبت أن هذا الفضاء غير تام .

ومن أجل ذلك نأخذ متتالية عناصرها من $C[0,1]$ بحيث تكون كوشية ولكنها غير متقاربة في $C[0,1]$ ((أي نهاية هذه المتتالية هي عبارة عن دالة غير مستمرة على المجال $[0,1]$))

ولنعرف المتتالية (x_n) بالشكل التالي :

$$\boxed{1}\ \ldots\ldots\quad x_n(t)=\begin{cases}0 & ;\ t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ 1 & ;\ t\in[a_n,1] \quad ;a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{n} \quad ;n>1\end{cases}$$

وبيانياً يكون المنحني البياني للدالة x_n كالتالي :



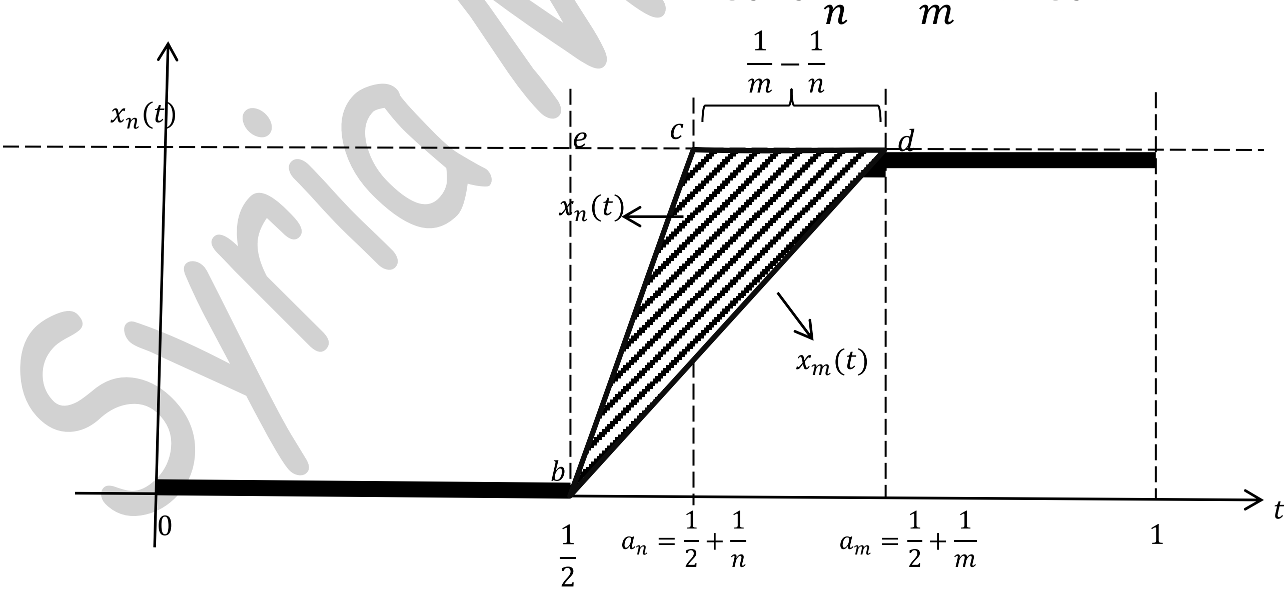
نلاحظ أنه ضمن المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ جميع المنحنيات البيانية للمتتالية x_n تنطبق على المحور (ot) وفي المجال $[a_n,1]$ تنطبق على المستقيم $x_n(t)=1$

كما أننا نلاحظ أن الخط البياني للدالة x_n الذي هو عبارة عن متتالية من التوابع مستمر وضوحاً من الشكل على المجال $[0,1]$ وسنثبت أن هذه المتتالية كوشية أي لنبرهن أنه :

$$\forall\varepsilon>0\quad ;\exists N_0\in N\quad ;\ n,m\geq N_0\quad :\ d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

حيث : $d(x_n,x_m)=\int_0^1|x_n(t)-x_m(t)|\quad d(t)$

بفرض $n>m$ سيكون لدينا $\frac{1}{n}<\frac{1}{m}$ ويكون لدينا هندسياً :



$$\Rightarrow d(x_n,x_m)=\underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}}|x_n(t)-x_m(t)|\,d(t)}_{=0}+\int_{\frac{1}{2}}^{a_m}|x_n(t)-x_m(t)|\,d(t)+\underbrace{\int_{a_m}^{1}|x_n(t)-x_m(t)|\,d(t)}_{=0}$$

$$\Rightarrow d(x_n,x_m)=\int_{\frac{1}{2}}^{a_m}|x_n(t)-x_m(t)|\quad d(t)\quad ;x_n(t)\geq x_m(t)\qquad \forall\, t\in\left[\frac{1}{2},a_m\right]$$

<< استطعنا الاستغناء عن القيمة المطلقة كو ننا فرضنا بفرض $n>m \Leftarrow x_n(t)\geq x_m(t)$ >>

ومنه $d(x_n,x_m)$ يمثل مساحة المثلث bed مطروحاً من مساحة المثلث bec $\Leftarrow$

$$d(x_n,x_m)=\frac{1}{2}(|be|\times|ed|)-\frac{1}{2}(|be|\times|ec|)$$

$$\Rightarrow d(x_n,x_m)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{m}-\frac{1}{n}<\frac{1}{m}\quad \dots\dots\dots\dots(*)$$

ولكن حسب خاصة أرخميدس $\forall \underbrace{x\ ,\ y}_{\text{أحدهما على الأقل موجب}}\in\mathbb{R}\ ;\exists N_0\in N\ ;N_0.x>y$

فإذا أخذنا $(x=1)$ و $(y=\frac{1}{\varepsilon})$ نجد :

$$\forall\varepsilon>0\quad ;\exists N_0\in N\quad ;N_0.1>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow\frac{1}{N_0}<\varepsilon$$

ولكن لدينا $n>m\geq N_0 \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{n}<\frac{1}{m}\leq\frac{1}{N_0}<\varepsilon$

بالتعويض في $(*)$ نجد :

$$\forall\varepsilon>0\quad ;\exists N_0\in N\quad ;\ n,m\geq N_0\quad :\ d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

وبالتالي فإن المتتالية (x_n) هي متتالية كوشية .

- والأن سنبرهن أن المتتالية (x_n) ليست متقاربة في الفضاء $C[0,1]$ ولنبرهن أن x هي نهاية المتتالية x_n ولنبرهن أن x هي دالة غير مستمرة على المجال $[0,1]$.

-بفرض أن x هي نهاية للمتتالية x_n

إذن لدينا حسب تعريف التقارب .

$$\forall\varepsilon>0\quad ;\exists N_0\in N\quad ;\ n\geq N_0\quad :\ d(x_n,x)<\varepsilon$$

وبمعنى أخر لدينا من المفروض

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$$

ولكن لدينا حسب تعريف المترك المعرف :

$$d(x_n, x) = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|\, d(t)$$

إنه من الفرض لدينا كلاً من $x_n(t)$, $x(t)$ هي دوال مستمرة وطرح دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة والقيمة المطلقة مستمرة أيضاً إذن يمكننا تطبيق خاصة تكامل "مجموع يساوي مجموع التكاملات".

$$\Rightarrow d(x_n, x) = \int_0^{\frac{1}{2}} |x_n(t) - x(t)|\, d(t) \ + \int_{\frac{1}{2}}^{a_n} |x_n(t) - x(t)|\, d(t) + \int_{a_n}^{1} |x_n(t) - x(t)|\, d(t)$$

وحسب $\boxed{1}$ يكون لدينا :

$$d(x_n, x) = \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|\, d(t) \ + \int_{\frac{1}{2}}^{a_n} |x_n(t) - x(t)|\, d(t) + \int_{a_n}^{1} |1 - x(t)|\, d(t)$$

وبالتالي وبجعل $n \to \infty$ نجد :

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|\, d(t) \ + \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{a_n} |x_n(t) - x(t)|\, d(t) + \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{1} |1 - x(t)|\, d(t) \ = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|\, d(t) \ + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |x_n(t) - x(t)|\, d(t)}_{=0\left(\left(\text{لأن التكامل المحدد من} \propto \text{إلى} \propto \text{يساوي الصفر}\right)\right)} + \int_{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1 - x(t)|\, d(t) \ = 0$$

إذن لدينا مجموع التكاملات غير السالبة يساوي الصفر فإن كلاً من هذه التكاملات يساوي الصفر أي أنَّ

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|\, d(t) \ = 0 \qquad \text{وأيضاً} \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{1} |1 - x(t)|\, d(t) \ = 0$$

بما أن x دالة مستمرة فيجب أن نجد

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = 0 & ; \ 0 \le t < \frac{1}{2} \\ 1 - x(t) = 0 & ; \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = \begin{cases} 0 & ; \ 0 \le t < \frac{1}{2} \\ 1 & ; \ \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

نلاحظ أن x هي دالة منقطعة غير مستمرة على المجال $[0,1]$ ومنه فإن $x \notin C[0,1]$وبالتالي فإن الفضاء $C[0,1]$ فضاء غير تام بخصوص المترك المعرف عليه.

انتهت المحاضرة