◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄ المحاضرة الخامسة   عنوان المحاضرة : خاصية الفرق الشاظري

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- مجموعة من التمارين

2- خاصية الفرق التناظري

3- مبرهنات هامة

تمرين مؤسسة تجارية تستخدم عمالاً من المدينة ومن خارجها فإذا كان 60% من العمال إناثاً و 30% من العمال من المدينة , وواحد من كل أربعة عمال هو من الذكور ومن المدينة. عين نسبة الإناث العاملات ومن خارج المدينة في هذه المؤسسة ؟

الحل :

ليكن A الحدث الدال على أن العمال من الإناث :

$$\Rightarrow \ P(A) = 0.60$$

وليكن B الحدث الدال على أن العمال من الذكور:

$$\Rightarrow \ P(B) = 1 - P(A) = P(A') = 0.40$$

وليكن C الحدث الدال على أن العمال من المدينة :

$$\Rightarrow P(C) = 0.30$$

وليكن D الحدث الدال على أن العمال من خارج المدينة :

$$\Rightarrow \ P(D) = 1 - P(C) = P(C') = 0.70$$

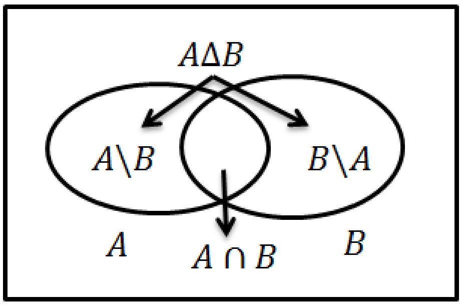
لدينا : $P(B \cap C) = 0.25$, والمطلوب هو : $P(A \cap D) = ?$

لإيجاد النسبة يمكن كتابة ما يلي :

	D	C
A	$A \cap D$	$A \cap C$
B	$B \cap D$	$B \cap C$

نعلم أن مجموعة الإناث تمثل اجتماع مجموعتين :

الإناث من المدينة والإناث من خارج المدينة



$$A = (A \cap C) \cup (A \cap D)$$

$$\Rightarrow (A \cap D) = A\backslash[(A \cap C)] = A[C\backslash(B \cap C)]$$

$$\Rightarrow\ P(A \cap D) = P(A) - [P(C) - P(B \cap C)]$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(A \cap D) = P(A) - P(C) + P(B \cap C)$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(A \cap D) = 0.60 - 0.30 + 0.25 = 0.55$$

أي أن نسبة الإناث من خارج المدينة هي 55%

تمرين بفرض أن A, B حدثان متنافيان وأن $P(A) = 0.30$, $P(B) = 0.60$ أوجد كلاً مما يلي:

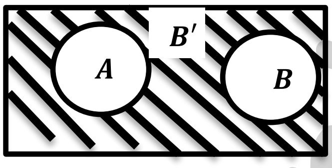
$$P(A' \cap B'), P(A \cup B'), P(A \cap B), P(A \cup B), P(B'), P(A')$$

الحل :

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.30 = 0.70$$

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.60 = 0.40$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.30 + 0.60 = 0.90$$



$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(A \cup B') = P(B') = 0.40$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.90 = 0.1$$

💙 خاصية الفرق التناظري 💙

مبرهنة $$P(A\Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

حيث : فرق تناظري $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$

◄ **البرهان :** $$P(A\Delta B) = P[(A\backslash B) \cup (B\backslash A)]$$

$$= P[(A \cap B') \cup (B \cap A')] = P(A \cap B') + P(B \cap A')$$

$$= P\big(A\backslash(A \cap B)\big) + P\big(B\backslash(A \cap B)\big)$$

$$= [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)]$$

$$\Rightarrow P(A\Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

متتالية احتمالية

ملاحظة : وجدنا سابقاً أن $\underbrace{P(A_1 \cup A_2)}_{\geq 0} = \underbrace{P(A_1)}_{\geq 0} + \underbrace{P(A_2)}_{\geq 0} - \underbrace{P(A_1 \cap A_2)}_{\geq 0}$

$$\Rightarrow P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$$

مبرهنة (هامة) إذا كانت $A_1, A_2, \dots \dots$ متتالية معدودة من الأحداث F عندئذ فإن :

$$P(\cup_{i\geq 1} A_i) \leq \sum_{i\geq 1} P(A_i)$$

◀البرهان : نشكل الأحداث التالية : $B_1 = A_1$

$$B_2 = A_2 \backslash A_1$$

$$B_3 = A_3 \backslash (A_1 \cup A_2)$$

$$\vdots$$

$$B_n = A_n \backslash \cup_{i=1}^{n-1} A_i$$

عندئذ نلاحظ أن الأحداث $(B_i)_{i\geq 1}$ متنافية مثنى مثنى وأن :

$$B_i \subseteq A_i \quad : \quad i \geq 1$$

$$\cup_{i\geq 1} B_i = \cup_{i\geq 1} A_i$$

$$\Rightarrow P(\cup_{i\geq 1} A_i) = P(\cup_{i\geq 1} B_i) = \sum_{i\geq 1} P(B_i)$$

وبما أن: $B_i \subseteq A_i \quad \Leftarrow \quad p(B_i) \leq p(A_i)$

حسب خواص الاحتمال الرئيسية :

$$\Rightarrow \sum_{i\geq 1} P(B_i) \leq \sum_{i\geq 1} P(A_i)$$

فنجد أن : $\Rightarrow P(\cup_{i\geq 1} A_i) \leq \sum_{i\geq 1} P(A_i)$

مبرهنة $P(\cap_{i\geq 1} A_i) \geq 1 - \sum_{i\geq 1} P(A'_i)$

◀البرهان : $P(\cap_{i\geq 1} A_i) = 1 - P(\cap_{i\geq 1} A_i)' \underbrace{=}_{\text{حسب دومورغان}} 1 - P(\cup_{i\geq 1} A'_i)$

حسب مبرهنة سابقة : $P(\cup_{i\geq 1} A'_i) \leq \sum_{i\geq 1} P(A'_i)$

نضرب بإشارة (-) فتقلب إشارة المتراجحة ثم نجمع للطرفين (1) :

$$\Rightarrow -P(\cup_{i\geq 1} A'_i) \geq -\sum_{i\geq 1} P(A'_i) \;\Rightarrow\; 1-P(\cup_{i\geq 1} A'_i) \geq 1-\sum_{i\geq 1} P(A'_i)$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(\cap_{i\geq 1} A_i) \geq 1-\sum_{i\geq 1} P(A'_i)$$

مبرهنة هامة : الاضطراد المتزايد ((سؤال دورة))

لتكن $A_1, A_2, \dots\dots, A_n, \dots.$ متتالية من الأحداث F غير متناقصة (متزايدة) من أحداث F أي أن:

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ وكان $A_i = \cup A_{n\geq 1}$ عندئذ:

$$P(A) = P(\cup_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

◄ **البرهان :** بما أن المتتالية غير متناقصة فإن: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \subseteq A_n$

فيمكن كتابة $\cup_{n\geq 1} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$

$$= A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_3 \backslash A_2) \cup \dots\dots \cup (A_n \backslash A_{n-1}) \cup \dots$$

بما أن الأحداث : $\{A_n \backslash A_{n-1}\}_{n\geq 1}$ متنافية مثنى مثنى ومنه :

$$P(\cup_{n\geq 1} A_n) = P(A_1) + P(A_2 \backslash A_1) + \cdots + P(A_n \backslash A_{n-1}) + \cdots$$

بما أن : $= \lim_{n\to\infty}[P(A) + P(A_2 \backslash A_1) + \cdots + P(A_n \backslash A_{n-1}) + \cdots]$

$$= \lim_{n\to\infty}[P(A \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_3 \backslash A_2) \dots\dots \cup (A_n \backslash A_{n-1}) \dots)]$$

ولكن لدينا : $A_n = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup \dots\dots \cup (A_n \backslash A_{n-1})$

وبالتالي نجد أن : $\Rightarrow P(\cup_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

و هي خاصة الاستمرار من الادنى.

انتهت المحاضرة

لو مشيت (خطوة واحدة) كل يوم باتجاه هدفك لوصلت ! لكن المشكلة أنك واقف بانتظار (معجزة) تحقق لك الهدف مباشرة بقفزة واحدة , و هذا لن يحصل !

إعداد: نور مهره **منى شغل**إيناس دللي