◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄المحاضرة: 9+10 عنوان المحاضرة: متسلسلات التوابع الحقيقية

بدأنا في المحاضرة السابقة ببحث جديد (متسلسلات التوابع الحقيقية) وعرفنا متتالية المجاميع الجزئية لها وقلنا أنها تتقارب إذا تقاربت متتالية المجاميع الجزئية لها وتتباعد بتباعدها وتناولنا بعض الخواص والنتائج والأمثلة وسوف نقوم في هذه المحاضرة بتناول بعض الأمثلة والمبرهنات

مثال : حدد منطقة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n\,(1-x)$ المعرفة على $\mathbb{R}$

تكون المتسلسلة متقاربة إذا كانت متسلسلة المجاميع الجزئية لها متقاربة

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k\,(1-x) = \sum_{k=1}^{n} (x^k - x^{k-1})$$

$$= (x-x^2)+(x^2-x^3)+\cdots\cdots+(x^n-x^{n+1}) = x - x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x - x^{n+1})$$

$$= \begin{cases} \text{غير موجودة} & x=-1 \\ -\infty & |x|>1 \\ x & |x|<1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$$

إذاً تتقارب متتالية المجاميع الجزئية فقط :

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s_n(x) = \begin{cases} x & |x|<1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$$

نجدا أن $s_n(x)$ متقاربة على المجال $]-1,1]$ فالمتسلسلة المعطاة متقاربة نقطياً في المجال $]-1,1]$

لنبرهن فيما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n\,(1-x)$ متقاربة على المجال $]-1,1]$

هل هذا صحيح ؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = x = s$$

إذاً تابع النهاية هو $x = s$ متقاربة نقطياً عند كل قيمة لـ $x \in]-1,1[$ وليس تقارب منتظم

مثال : أوجد منطقة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$ المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

الحل: إن المتسلسلة المعطاة متسلسلة هندسية أساسها $r = \frac{x-1}{x+1}$ وتكون متقاربة فقط إذا كان

$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$ أي $-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \;\cdots\cdots *$

١- إذا كان $x+1>0 \Leftarrow -1-x < x-1 < x+1$

(قسمنا طرفي المتراجحة (*) على $x+1$ مقدار موجب لانقلب إشارة المتراجحة)

$x+1 > x-1 \Leftarrow -1<1$ محققة دوماً

$-1-x < x-1 \Leftarrow 0<2x \Leftarrow 0<x$

٢- إذا كان $x+1<0 \Leftarrow -1-x > x-1 > x+1$

$x+1 < x-1 \Leftarrow -1>1$ غير محققة

$-1-x > x-1 \Leftarrow 0>2x \Leftarrow 0>x$

إذا كانت $x<0$ لنفرض أن $x=-y$

$$\Rightarrow 1 < \frac{y+1}{y-1} = \left|\frac{-y-1}{-y+1}\right| = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

بالتالي تكون المتسلسلة متباعدة إذاً تتقارب المتسلسلة في المجال $]0,+\infty[$

◄**تعريف**: نقول عن متسلسلة التوابع الحقيقية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ أنها متقاربة نقطياً إذا وفقط إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية متقاربة (نقطياً) كمتتالية عددية من أجل كل قيمة لـ x من I

مثال : بين فيما إذا كانت متسلسلة التوابع متقاربة نقطياً على $I = [0,1]$

$$\frac{1}{x+1} - \left(\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right) - \left(\frac{1}{(x+2)(x+3)}\right) \ldots\ldots\ldots$$

الحل:

$$s_n(x) = \frac{1}{x+1} - \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) - \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) - \ldots\ldots - \left(\frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}\right)$$

بعد الاختصار نجد :

$$s_n(x) = \frac{1}{x+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x+n} = 0$$

نجد أن متتالية المجاميع الجزئية $s_n(x)$ متقاربة بانتظام من الصفر على المجال $[0,1]$

لأنه يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N_0 > \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{\text{نستنتجه بعد الحل}}$ بحيث يكون :

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\frac{1}{x+n} - 0\right| = \frac{1}{x+n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N_0} < \varepsilon$$

$$\forall n \in [0,1], \qquad n \geq N_0$$

نجد أنا المتسلسلة متقاربة بانتظام على $[0,1]$

◄تنويه على المثال السابق :

نلاحظ أنه تم إعطاء المتسلسلة بدلالة حدودها وليس بالتعبير $\sum$ وهذا وارد جداً واستنتجنا الحد العام بأنفسنا إضافة إلى ذلك قمنا بتفريق الكسور في كل حدود المتتالية (كسور جزئية) واختصرنا وأوجدنا نهاية متتالية المجاميع الجزئية ، إلى هنا نجد أن المتسلسلة متقاربة نقطياً ومن تعريف ε استنتجنا أنها متقاربة بانتظام وذلك لأن N_0 تابع ل ε فقط

◀**تعريف**: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع على J نفرض أن المتسلسلة متقاربة نقطياً ومجموعها يساوي $S(x)$ فإن مجموع الباقي النوني للمتسلسلة يعطى بالعلاقة :

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

◀**تعريف**: تكون متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I إذا كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $x \in I \,, n \geq N_0 \quad : \quad |r_n(x)| < \varepsilon$

دراسة تقارب المنتظم لمتسلسلات التوابع

مبرهنة ١ : الشرط اللازم والكافي لتقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بانتظام على I ومجموعها $S(x)$ هو أن يسعى بشكل منظم حدها العام للمتسلسلة إلى التابع الصفري مهما كانت $x \in \mathbb{S}$

البرهان :

بما أن المتسلسلة متقاربة بانتظام فإن متتالية المجاميع الجزئية متقاربة بانتظام على I .

حسب التعريف يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون :

$$|S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad : \quad m \geq n \geq N_0$$

نفرض : $n \geq N_0 + 1 \Leftarrow n > n - 1 \geq N_0$

$$|f_n(x)| = |s_n(x) - s_{n-1}(x)| < \varepsilon$$

وجدنا لكل $\varepsilon > 0$ عدد $N_0 \neq 0$ بحيث يتحقق $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$ و $n \geq N_0$ أي أن $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ وبالتالي $f_n(x)$ يسعى للتابع الصفري بانتظام على I

◀**تنويه**: بما أن N_0 طبيعي فإن $N_0 + 1$ طبيعي وجعلنا n أكبر منه ونلاحظ أن n حلت محل m و $n - 1$ حلت محل n .

مثال :

لتكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n\,(1-x)$ المعرفة على $I\ = \left]-1,1\right[$

وجدنا متتالية المجاميع الجزئية : $s_n(x) = x - x^{n+1} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} S(x) = x$

لنثبت أن الحد العام يسعى للتابع الصفري بشكل منظم على I:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n(1-x) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} sup_{x\in \mathrm{I}}\,|f_n(x) - f(x)|$$

$$= \lim_{n\to\infty} sup_{x\in \mathrm{I}}\,|x^n(1-x)|$$

نأخذ $x = \frac{n}{n+1}$ $\quad x\in \left]-1,1\right[$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{n}{n+1}\right) = 0$$

وجدنا أن الحد العام يسعى إلى التابع الصفري بانتظام على $\left]-1,1\right[$ لنثبت أن التقارب غير منظم بالضرورة :

حسب تعريف التقارب $\{s_n(x)\}$: $\forall\ \varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون :

$$|s_n(x) - s(x)| = |x - x^{n+1} - x| = |x^{n+1}|$$

$$|s_n(x) - s(x)| = |x|^{n+1} < \varepsilon$$

$$(n+1)\ln|x| < \ln\varepsilon$$

$$(n+1) > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}$$

$$n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|} - 1$$

نأخذ $N_0 > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|} - 1$

N_0 تابع ل x, ε والتقارب نقطي على $]-1,1[$

المحاضرة العاشرة

مبرهنة ٢ : الشرط اللازم والكافي لتقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بانتظام على I هو أن يتحقق الشرط التالي : يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون :

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots\cdots + f_m(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

لأجل : $m \geq n \geq N_0$ ولكل $x \in I$

البرهان : لتكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I يكافئ قولنا أن متتالية المجاميع الجزئية $\{s_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على I حيث $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ أي يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث:

$$|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad \text{و}\ m \geq n \geq N_0 \quad : \quad x \in I$$

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots\cdots + f_m(x)| < \varepsilon$$

أي وجدنا لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون : $\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon$

مثال :

ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1 - x^2)$ المعرفة على $I = [-p, p]$ و $0 < p < 1$

حسب المبرهنة (٢) يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد $N_0 \neq 0$ ومن أجل $m \geq n \geq N_0$ فإن

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} x^k (1 - x^2)\right|$$

$$= |x^n(1 - x^2) + x^{n+1}(1 - x^2) + x^{n+2}(1 - x^2) + \cdots + x^{m-1}(1 - x^2) + x^m(1 - x^2)|$$

$$= |x^n - x^{n+2} + x^{n+1} - x^{n+3} + x^{n+2} - x^{n+4} + \cdots + x^{m-1} - x^{m+1} + x^m - x^{m+2}|$$

بالاختصار نجد :

$$|x^n + x^{n+1} - x^{m+1} - x^{m+2}| = |x^n(1+x) - x^{m+1}(1+x)|$$

$$= |x^n(1+x)(1-x^{m-n+1})| \leq |x^n(1+x)| \leq |p^n(1+p)| < \varepsilon$$

من المتراجحة $p^n(1+p) < \varepsilon$ نوجد قيمة n أي قيمة N_0 :

$$\ln p^n(1+p) < \ln \varepsilon$$

$$\ln p^n + \ln(1+p) < \ln \varepsilon$$

$$n \ln p \ < \ln \varepsilon - \ln(1+p)$$

$$n > \frac{\ln \varepsilon - \ln(1+p)}{\ln p}$$

نأخذ $N_0 > \frac{\ln \varepsilon - \ln(1+p)}{\ln p}$ إذاً وجدنا N_0 تابع ل ε بالتالي المتسلسلة متقاربة بانتظام على $[-p, p]$

اختبار فايرشتراس :

مبرهنة ٣ : لتكن متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المعرفة على I وبفرض وجود متسلسلة عددية $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة وذات حدود موجبة بحيث يكون :

$$|f_n(x)| < b_n \quad : n \in \mathbb{N} \quad x \in I$$

عندئذ:

١- تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بإطلاق على I

٢- تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I

مثال :

ادرس تقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ المعرفة على $\mathbb{R}$

حسب اختبار فايرشتراس نقارنها مع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$$

تكون المتسلسلة متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$ أو على أي مجال جزئي من $\mathbb{R}$.

بنفس الطريقة نثبت المتسلسلات التالية :

١-) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\sin nx)}{n^3}$ نقارنها مع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ المتقاربة

٢-) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\sqrt{n}\,x}{n^3}$ نقارنها مع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ المتقاربة

٣-) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^2}$ نقارنها مع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ المتقاربة

اختبار ديريكليه:

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على I وبفرض الحد العام يكتب بالشكل:

$$f_n(x) = g_n(x).h_n(x)$$

حيث:

١) متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ محدودة بعدد ثابت وذلك أياً كان $\forall x \in I$

٢) متتالية التوابع $\{h_n(x)\}$ متناقصة وذات حدود موجبة وهي متقاربة بانتظام على Iمن التابع الصفري $f(x)$

عندئذٍ: تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I

مثال: ادرس تقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n}$ على المجال $]0,1[$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n.\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).h_n(x)$$

ندرس متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n$ أساسها $r = 1$

$$S_n(x) = (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + \cdots + (-x)^n = \frac{(-x)-(-x)^{n+1}}{1+x}$$

لنوضح كيف وصلنا إلى هذه النتيجة : لدينا :

$$S_n(x) = (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + \cdots + (-x)^n \;....(1)$$

نضرب الطرفين بالأساس $(-x)$:

$$(-x)S_n(x) = (-x)^2 + (-x)^3 + \cdots + (-x)^{n+1} \;...(2)$$

بطرح (2)من (1):

$$(1+x)S_n(x) = (-x) - (-x)^{n+1} \Longrightarrow \boxed{S_n(x) = \frac{(-x) - (-x)^{n+1}}{1+x}}$$

تذكرة: متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية:

$$S_n(x) = \alpha\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

حيث α هو الحد الأول و r هو الأساس.

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{-x-(-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{-x}{1+x} = s(x)$$

حيث نهاية $(-x)^{n+1}$ عندما n تسعى للانهاية هي الصفر

$$\Longrightarrow s(x) = \frac{-x}{1+x} \qquad \text{و} \qquad x \in]0,1[$$

$$|S_n(x)| = \left|\frac{-x-(-x)^{n+1}}{1+x}\right| \underset{\text{بحذف المقام يكبر المقدار}}{\leq} |-x-(-x)^{n+1}| \underset{|a+b|\leq|a|+|b|}{\leq} |x| + |x|^{n+1}$$

$$1+1<2$$

المتسلسلة محدودة على $]0,1[$ المتتالية $\{h_n(x)\}$ حيث $h_n(x) = \frac{1}{n}$ متناقصة

ومتقاربة بانتظام من التابع الصفري على I.

وبالتالي المتسلسلة المعطاة متقاربة بانتظام حسب اختبار ديريكليه

اختبار آبل:

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على I وبرفض حدها العام يكتب بالشكل:

$$f_n(x) = g_n(x).h_n(x)$$

حيث:

١) متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ متقاربة بانتظام على I

٢) متتالية التوابع $\{h_n(x)\}$ متناقصة وذات حدود موجبة ومحدودة بعدد ثابت

وذلك $\forall\ x\ \in I$

عندئذٍ تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I

مثال: ادرس تقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2x^2}$ معرفة على $[0,p]$ و $0 < p < 1$

الحل: حسب اختبار آبل :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n.\frac{1}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).h_n(x)$$

وإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ هندسية متقاربة بانتظام على $[0,p]$

٢-المتتالية $\{h_n(x)\} = \left\{\frac{1}{1+n^2x^2}\right\}$ متناقصة على $[0,p]$ لأن $\frac{1}{1+(n+1)^2x^2} > \frac{1}{1+n^2x^2}$ وحدودها موجبة وهي محدودة :

$$\left|\frac{1}{1+n^2x^2}\right| \leq 1$$

حسب اختبار آبل المتسلسلة متقاربة بانتظام على $[0,p]$

نعتذر عن وجو خطأ في المحاضرات السابقة لا يوجد في المقرر مجال $\mathbb{S}$ أينما ورد فهو I .

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد أنس القزاز - عبد الكريم دباجة - لانا شهاب