نظري

◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄المحاضرة : السابعة والثامنة عنوان المحاضرة: مبرهنة الحية

أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة مبرهنة الحية وبذلك سيتم دمج المحاضرتين معاً.

نوهنا سابقاً أن المخطط ليس كل اسطره تامة وفيما يأتي نص المبرهنة بدون تعديل علماً انه ادرجنا النص مرة أخرى لانه يأتي كسؤال امتحاني (اكتب نص مبرهنة الحية ويطلب برهان جزء محدد منها).

المبرهنة الحية : ليكن المخطط التبديلي من التشاكلات المودولية .

إن المخطط تبديلي واسطره متتاليات تامة

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & a'\downarrow & & a\downarrow & & a''\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{f'} & N & \xrightarrow{g'} & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

عندها يوجد متتالية تامة وهي

$$0 \longrightarrow ker a' \xrightarrow{\bar{f}} ker a \xrightarrow{\bar{g}} ker a'' \xrightarrow{d} coker a' \xrightarrow{\bar{f}'} coker a \xrightarrow{\bar{g}'} coker a'' \longrightarrow 0$$

حيث $\bar{f},\bar{g}$ مقصور f,g على المنطلق أما $\bar{f}',\bar{g}'$ تشاكلات مستخلصة من f',g'

البرهان

(يجب برهان انها تامة عند كل حد و يجب بناء كل العلاقات الموجودة في المتتالية السابقة والتحقق منها (أنها تطبيق وتشاكل) وسنبدأ ب $ker a'$).

ملاحظة : إن كلاً من f,g,f',g' هي تطبيق و تشاكل مودولي وأن كلاً من f,f' هي تطبيقات متباينة و ايضاً كلاً من g,g' هي تطبيقات غامرة واخيراً $Imf = kerg$ و $Imf' = kerg'$ وذلك لأن كل سطر من المخطط هو متتالية قصيرة تامة .

١) حتى تكون المتتالية تامة عند $ker a'$ يجب ان يكون $\bar{f}$ **متباين**.

- لنوجد $\bar{f}$ (إن $\bar{f}$ هو مقصور التطبيق f على المنطلق ونعلم أن المقصور هو نفس قاعدة ربط ونفس المستقر ولكن المنطلق يكون مجموعة جزئية من المنطلق الأساسي).

(إن $\bar{f}$ يصور $kera'$ ب $kera$ ومنه أي عنصر من $kera'$ سيكون موجود ب M' ومنه يمكن تصوريه حسب التطبيق a' (لاحظ المخطط التوضيحي من المحاضرة السابقة)).

$$x \in kera' \rightarrow x \in M' \ : a'(x) = 0_{N'}$$

إن $a'(x) \in N'$ وبالتالي يمكن تصويره عبر التطبيق f' ومنه :

$$\Rightarrow f'\big(a'(x)\big) = f'(0) \Leftrightarrow f' o\ a'(x) = \underbrace{0}_{\text{لان } f' \text{ تشاكل مودولي}} \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{لأن المخطط تبديلي}} \quad a\ o\ f(x) = 0$$

بما أن f' تشاكل مودولي فإنه يصور الصفر بالصفر وبالتالي :

$$a\big(f(x)\big) = 0 \Rightarrow f(x) \in kera$$

اذا

$$M' \xrightarrow{f} M$$

و

$$kera' \xrightarrow{\bar{f}} kera$$

(أخذنا عنصر من $kera'$ ووجدنا ان صورته وفق $\bar{f}$ هو عنصر من $kera$ لا تنسى أن قاعدة ربط $\bar{f}$ هي نفسها f وذلك حسب تعريف مقصور تطبيق) اذا $\bar{f}$ يصور $kera'$ ب $kera$.
(هو تطبيق وتشاكل ايضاً ولا داعي لاثبات ذلك لانه مقصور التطبيق الأساسي f).

- لنثبت أن $\bar{f}$ متباين: ليكن $\bar{f}(\theta_1) = \bar{f}(\theta_2)$: $\theta_1, \theta_2 \in kera'$ وبما أن $\bar{f}$ مقصور f على المنطلق فإن $\bar{f}(\theta_1) = f(\theta_1) = f(\theta_2) = \bar{f}(\theta_2)$ وأن f متباين فيكون $\theta_1 = \theta_2$.

(اكتفينا بإثبات انه متباين لان الحد الذي قبل $kera'$ هو المودول الصفري)

٢) حتى تكون المتتالية تامة عند $kera$ يجب ان يكون $Im\bar{f} = ker\bar{g}$

- يجب بناء $\bar{g}$ (نفس طريقة $\bar{f}$) ومن ثم ثبت احتوائين ل $Im\bar{f} = ker\bar{g}$

لنوجد $\bar{g}$ (إن $\bar{g}$ يصور $kera$ ب $kera''$).

$$y \in kera \rightarrow y \in M \ : a(y) = 0_N$$

إن $a(y) \in N$ وبالتالي يمكن تصويره عبر التطبيق g' ومنه :

$$\Rightarrow g'\big(a(y)\big) = g'(0) \Leftrightarrow g' o\ a(y) = 0 \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{لأن المخطط تبديلي}} \quad a''\ o\ g(y) = 0$$

Syria Math Team

بما أن g' تشاكل مودولي فإنه يصور الصفر بالصفر وبالتالي :

$$a''\big(g(y)\big)=0 \Longrightarrow g(y)\in kera''$$

اذا $M \xrightarrow{g} M''$

و $kera \xrightarrow{\bar{g}} kera''$

إن $\bar{g}$ هو تطبيق وتشاكل لأنه مقصور التطبيق g .

لنثبت الأن أن المساواة التالية محققة $Im\bar{f}=ker\bar{g}$

- ليكن $x\in Im\bar{f}$ وبالتالي فإن $x\in kera$ يحقق أن يوجد :

$$\exists t\in kera' : \bar{f}(t)=f(t)=x$$

وايضاً بما أن $x\in M$ فإن $a(x)=0$ وايضاً يمكن أخذ صورة x وفق التطبيق $\bar{g}$

$$\bar{g}(x)=g(x)=g\big(f(t)\big)=gof(t)=0(t)=0$$

وذلك لان تركيب أي تشاكلين في متتالية تامة هو الصفر ومنه $\bar{g}(x)=0$ وبالتالي $x\in ker\bar{g}$ ومنه $Im\bar{f}\subseteq ker\bar{g}$

- ليكن $x\in ker\bar{g}$ وبالتالي فإن $x\in kera$:

$$\bar{g}(x)=g(x)=\underbrace{0}_{\text{حسب تعريف النواة}}$$

وايضاً بما أن $x\in M$ فإن $a(x)=0$ وأن $\underbrace{x\in Imf}_{\text{لان } kerg=Imf}$ أي أن $\exists t\in M' : f(t)=x$

حتى يتم المطلوب يجب اثبات أن $t\in kera'$ (لانه اذا كانت تنتمي فنقول أن $f(t)=\bar{f}(t)=x\in Im\bar{f}$)

لدينا $f'\big(a'(t)\big)\underbrace{=}_{\text{لأن المخطط تبديلي}} a(x)=a\big(f(t)\big)=0$ وأن $\underbrace{f'(0)=0}_{f' \text{ تشاكل مودولي}}$ ومنه $f'\big(a'(t)\big)=f'(0)$

ولكن f' متباين اذا $a'(t)=0$ وبالتالي $t\in kera'$ ومنه $x\in Im\bar{f}$ أي ان $ker\bar{g}\subseteq Im\bar{f}$ واخيراً

$$ker\bar{g}=Im\bar{f}$$

Syria Math Team

٣) حتى تكون المتتالية تامة عند $kera''$ يجب ان يكون $Im\bar{g} = kerd$

- سنعرف قاعدة ربط d ومن ثم سنثبت انه تطبيق وتشاكل .

(لم نثبت $\bar{g}$ و $\bar{f}$ لانها تطبيقات مقصورة على منطلق كلاً من f, g على الترتيب ولكن بناء d لا يعتمد عليهم بشكل مباشر)

$$kera'' \xrightarrow{d} cokera'$$

ليكن $z \in kera''$ عندئذ يكون $z \in M''$ حيث $a''(z) = 0$ ولكن g غامر وبالتالي

$$\exists x \in M : \quad g(x) = z$$

وبالتالي $0 = a''(z) = a''\big(g(x)\big) \underbrace{=}_{\text{لأن المخطط تبديلي}} g'\big(a(x)\big)$

ومنه $a(x) \in kerg'$ (لان صورته وفق g' تساوي الصفر) ولكن $Imf' = kerg'$

ومنه $a(x) \in Imf'$ أي أن $\exists y \in N' : f'(y) = a(x)$

والان لنعرف العلاقة التالية :

$$d : \quad kera'' \to cokera' \underbrace{=}_{\text{عرفناه المحاضرة السابقة}} N'/Ima'$$

$$z \to d(z) = \underbrace{y}_{\in N'} + Ima'$$

لنثبت أن d **تطبيق** : ليكن $z_1, z_2 \in kera''$ بحيث $z_1 = z_2$ ولنثبت أن $d(z_1) = d(z_2)$

إن $z_1 \in kera''$ عندئذ يكون $z_1 \in M''$ ولكن g غامر وبالتالي

$$\exists x_1 \in M : \quad g(x_1) = z_1 \text{ أي أن } \exists y_1 \in N' : \underbrace{f'(y_1) = a(x_1)}_{*}$$

$$d(z_1) = y_1 + Ima'$$

إن $z_2 \in kera''$ عندئذ يكون $z_2 \in M''$ ولكن g غامر وبالتالي

$$\exists x_2 \in M : \quad g(x_2) = z_2 \text{ أي أن } \exists y_2 \in N' : \underbrace{f'(y_2) = a(x_2)}_{**}$$

$$d(z_2) = y_2 + Ima'$$

Syria Math Team

والأن لدينا $z_1 = z_2$ وبالتالي $g(x_1) = g(x_2)$ بطرح $g(x_1)$ من طرفين وكون g تشاكل فإن

$$g(x_2 - x_1) = 0$$

وبالتالي $x_2 - x_1 \in kerg = Imf$ وبالتالي $\exists t \in M' : f(t) = x_2 - x_1$

والان سننطلق من

$$f'(y_1 + a'(t)) = \underbrace{f'(y_1) + f'(a'(t))}_{\text{لان } f' \text{ تشاكل}} = \underbrace{a(x_1)}_{\text{حسب } *} + \underbrace{a(f(t))}_{\text{لان المخطط تبديلي}} = \underbrace{a(x_1 + f(t))}_{\text{لان } a \text{ تشاكل}}$$

$$= a(x_1 + x_2 - x_1) = a(x_2) = \underbrace{f'(y_2)}_{\text{حسب } **}$$

وبما أن f' متباين فإن $y_1 + a'(t) = y_2$ نضيف للطرفين Ima'

$$y_1 + a'(t) + Ima' = y_2 + Ima'$$

ولكن $a'(t) \in Ima'$ وبالتالي

$$y_1 + Ima' = y_2 + Ima' \Longrightarrow d(z_1) = d(z_2)$$

أي أن d تطبيق ولنثبت الان انه تشاكل .

نجد أن d تشاكل وضوحاً لأن كلاً من f', a هو تشاكل .

لنثبت الأن أن المساواة التالية محققة $Im\bar{g} = kerd$

- ليكن $x \in Im\bar{g}$ وبالتالي $x \in kera''$ وايضاً $x \in M''$ ومنه $a''(x) = 0$ ومنه

$$\exists y \in kera \ : \bar{g}(y) = g(y) = x$$

$$0 = a''(x) = a''(g(y)) \underbrace{=}_{\text{لان المخطط تبديلي}} g'o\, a(y) = g'(a(y)) = 0$$

وبالتالي $a(y) \in kerg' = Imf'$ وبالتالي $\exists n' \in N' : f'(n') = a(y)$

$$\Longrightarrow d(x) = n' + Ima'$$

ولكن $f'(n') = a(y) = 0$ وأيضاً f' متباين فيكون $kerf' = \{0\}$ ومنه $n' = 0$

$$d(x) = n' + Ima' = Ima'$$

(توضيح العنصر x اعطى الحيادي Ima' وفق التطبيق d ومنه العنصر x ينتمي لنواة d أي أن)

$$x \in kerd \text{ ومنه } Im\bar{g} \subseteq kerd$$

Syria Math Team

- الاحتواة المعاكس : ليكن $x \in kerd$ وبالتالي $x \in kera''$ أي أن $d(x) = Ima'$

وايضاً $x \in M''$ وبما أن g غامر فإن $\exists y \in M : g(y) = x$ وايضاً لدينا $a''(x) = 0$

ومنه $0 = a''(x) = a''\big(g(y)\big) = g'\big(a(y)\big) = 0$

وبالتالي $a(y) \in kerg' = Imf'$ وبالتالي $\exists n' \in N' : f'(n') = a(y)$

$$\Longrightarrow d(x) = n' + Ima'$$

ولكن $d(x) = Ima'$ أي أن $n' + Ima' = Ima'$ أي أن $n' \in Ima'$ أي أنه

$\exists m \in M' : a'(m) = n'$ وبالتالي ولننطلق من

$$g\big(y - f(m)\big) = \underbrace{g(y) - g\big(f(m)\big)}_{\text{تشاكل } g} = x - 0 = x$$

وذلك لان تركيب أي تشاكلين في متتالية تامة هو الصفر.

وايضاً إن $y - f(m) \in kera$ وذلك لأن

$$a\big(y - f(m)\big) = a(y) - a\big(f(m)\big) = \underbrace{f'(n')}_{f'(n') = a(y)} - \underbrace{f'\big(a'(m)\big)}_{\text{لان المخطط تبديلي}} = f'(n') - f'(n') = 0$$

مما سبق لاجل كل $x \in kerd$ فإنه وجد $y - f(m) \in kera$ ويحقق أن $g\big(y - f(m)\big) = x$

وبالتالي $x \in Im\bar{g}$ ومنه $kerd \subseteq Im\bar{g}$ أي أن $kerd = Im\bar{g}$ وهو المطلوب

٤) إن المتتالية تامة عند $cokera'$ (بنفس الأسلوب السابق) (وغير مطلوبة).

٥) حتى تكون $cokera$ تامة يجب ان يكون $Im\bar{f}' = ker\bar{g}'$

- لنبني $\bar{f}'$

$$\bar{f}' : cokera' \to cokera$$

$$\bar{f}' : N'/Ima' \to N/Ima$$

$$n' + Ima' \to \bar{f}'(n' + Ima') = \underbrace{f'(n')}_{\in N} + Ima \quad : n' \in N'$$

- إن $\bar{f}'$ **تطبيق لأن** $\forall n_1' + Ima', n_2' + Ima' \in cokera' \quad : n_1', n_2' \in N'$

وأن $(n_1' - n_2') + Ima' = Ima' \Longleftarrow n_1' + Ima' = n_2' + Ima'$

ومنه $n_1' - n_2' \in Ima'$ وبالتالي $\exists t \in M' : a'(t) = n_1' - n_2'$

Syria Math Team

لنأخذ صورة $n_1' - n_2'$ بالنسبة ل f'

$$f'(n_1' - n_2') = f'\big(a'(t)\big) \Rightarrow \underbrace{f'(n_1') - f'(n_2')}_{\text{لان } f' \text{ تشاكل مودولي}} = \underbrace{a\big(f(t)\big)}_{\text{لان المخطط تبديلي}}$$

$$\Rightarrow f'(n_1') = a\big(f(t)\big) + f'(n_2')$$

لنثبت أن الصور متساوية الان وليكن

$$f'(n_1') + Ima = \underbrace{a\big(f(t)\big)}_{\in Ima} + f'(n_2') + Ima = f'(n_2') + Ima$$

وبالتالي فهو تطبيق وايضاً هو تشاكل لان f' تشاكل .

- وايضاً $\bar{g}' : cokera \to cokera''$

$$n + Ima \to \bar{g}'(n + Ima) = \underbrace{g'(n)}_{\in N''} + Ima'' \quad : n \in N$$

بنفس الطريقة نثبت أنه تطبيق تشاكل .

لنثبت الأن أن المساواة التالية محققة $Im\bar{f}' = ker\bar{g}'$

- ليكن $n + Ima \in Im\bar{f}'$ وبالتالي $\underbrace{n'}_{\in N'} + Ima' \in cokera'$ بحيث $\exists$

$$\bar{f}'(n' + Ima') = f'(n') + Ima = n + Ima$$

أي أن $(f'(n') - n) + Ima = Ima$ وبالتالي $f'(n') - n \in Ima$

$$\exists m \in M : a(m) = f'(n') - n \Rightarrow n = f'(n') - a(m)$$

ومنه $\bar{g}'(n + Ima) = g'(n) + Ima'' = g'\big(f'(n') - a(m)\big) + Ima''$

$$= g'\big(f'(n')\big) - g'\big(a(m)\big) + Ima''$$

$$= 0 - \underbrace{a''\big(g(m)\big)}_{=0} + Ima'' = Ima''$$

عنصر تم تصويرة وفق $\bar{g}'$ اعطى المحايد فالعنصر ينتمي ل $ker\bar{g}'$

ومنه $Im\bar{f}' \subseteq ker\bar{g}'$

Syria Math Team

- لنثبت الاحتواء المعاكس : ليكن $n+Ima\in ker\bar{g'}$ ومنه $\bar{g'}(n+Ima)=Ima''$

وبالتالي $g'(n)+Ima''=Ima''$ أي أن $g'(n)\in Ima''$ أي انه

$$\exists m''\in M'':a''(m'')=g'(n)$$

ولكن $m''\in M''$ و g غامر اذاً $\exists m\in M:g(m)=m''$

$$g'(n)=a''\big(g(m)\big)=g'(a(m))\Rightarrow g'(n)-g'\big(a(m)\big)=0_{N''}$$

$$\Rightarrow g'\big(n-a(m)\big)=0_{N''}$$

$$\Rightarrow n-a(m)\in kerg'=Imf'\Rightarrow \exists n'\in N':f'(n')=n-a(m)$$

$$\Rightarrow n+Ima=f'(n')+a(m)+Ima=f'(n')+Ima=\bar{f'}(n'+Ima')$$

$$\Rightarrow n+Ima\in Im\bar{f'}\Rightarrow ker\bar{g'}\subseteq Im\bar{f'}\Rightarrow ker\bar{g'}=Im\bar{f'}$$

٦) حتى تكون متتالية تامة عند $cokera''$ يجب ان يكون $\bar{g'}$ غامر.

ليكن $n''+Ima''\in cokera''$ وبما أن g' غامر عندئذ $\exists n\in N:g'(n)=n''$ $\underbrace{}_{\in N''}$

$$\Rightarrow \bar{g'}(n+Ima)=g'(n)+Ima''=n''+Ima''$$

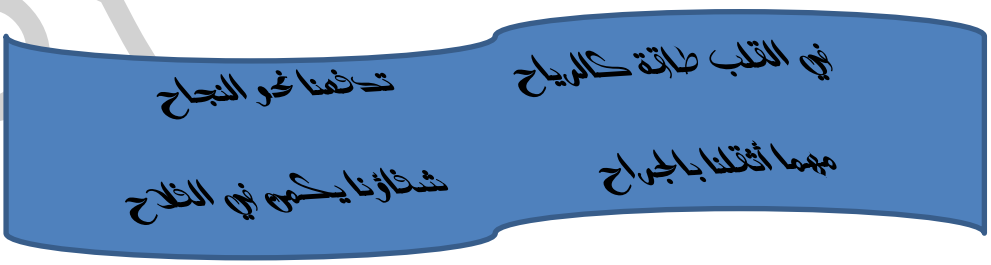
أي انه غامر (اكتفينا بإثبات انه غامر لان الحد الذي بعد $cokera''$ هو المودول الصفري)

وبذلك تكون المتتالية تامة عند كل حد وهو المطلوب .

انتهى البرهان

نوهت الدكتورة أنه يجب ذكر التعليلات عند الانتقال من خطة الى أخرى وهذه التعليلات تنال جزء من علامة السؤال .

انتهت المحاضرة



إعداد: لبنى الطون – احمد أبو النوت – شهد الحايك البوشي

Syria Math Team