◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: الرابعة عشر عنوان المحاضرة: التكاملات المعتلة

بدأنا في المحاضرة السابقة ببحث التكاملات المعتلة وتعرفنا على التكامل المعتلة من الدرجة الأولى وقمنا بدراسة تقاربها وتباعدها كما تعرفنا على معايير تقارب التكاملات المعتلة من النوع الأول في حالة التوابع غير سالبة معيار (التقارب-المقارنة-نهاية النسبة) . وسنكمل في هذه المحاضرة ما بدأناه وسنتعرف على معيار (كوشي-آبل-ديريكليه) وسنأخذ التكامل بطريقة التجزئة وتغير المتحول في التكاملات المعتلة.

معيار كوشي :

الشرط اللازم والكافي لتقارب التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ هو أن يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي A_0 بحيث $A_0 > a$ ويتحقق ما يلي :

١-)يوجد عددان A, A' بحيث يكون $A' \geq A \geq A_0$ ويتحقق الشرط :

$$|\emptyset(A') - \emptyset(A)| = \left|\int_a^{A'} f(x)dx - \int_a^{A} f(x)dx\right|$$

$$\emptyset(A) = \int_a^{A} f(x)dx \quad = \quad \left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| \leq \varepsilon$$

الإثبات :

نفرض أن $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ متقارباً أي أن $lim_{A\to\infty} \emptyset(A) = \emptyset(\infty)$ موجودة ومحدودة

وهذا يعني أنه يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد A_0 بحيث $A_0 > a$ $\quad |\emptyset(A') - \emptyset(A)| < \varepsilon$ لأجل $A' \geq A \geq A_0$ ومنه $\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| \leq \varepsilon$

وبالعكس : لكل $\varepsilon > 0$ عدد A_0 و $A_0 > a$ بحيث $A_0 > Max(a,0)$ ((بحيث إذا كان A مقدار سالب فإن $a > 0$ أو ابتداءً من 0)) $|\emptyset(A') - \emptyset(A)| < \frac{\varepsilon}{2}$ لأجل $A' \geq A \geq A_0$ نثبت A ونجعل A' تسعى ل ∞ ومنه

$$|\emptyset(\infty) - \emptyset(A)| = \left|\int_A^{\infty} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

بالتالي نحصل على تقارب التكامل $\int_A^{+\infty} f(x)dx$ وهو المطلوب .

ملاحظة : حذف جزء من حدود التكامل لا يؤثر على تباعده أو تقاربه

معيار آبل لدراسة تقارب تكامل معتل :

لتكن $f(x), g(x)$ تابعان معرفان على المجال $[a, +\infty[$ ، يكون التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ متقارباً إذا تحقق ما يلي :

١- التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ متقارباً

٢- التابع $g(x)$ مطرد و محدود أي : $L > 0$: $|g(x)| < L$ وذلك $\forall x \geq a$

الإثبات :من مبرهنة القيمة الوسطى الثانية نجد أن :

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)dx = g(x)\int_A^{\ell} f(x)\,dx + g\,(A')\int_{\ell}^{A'} f(x)\,dx \quad : \quad A \leq \ell \leq A'$$

ليكن $\varepsilon > 0$ وحسب الشرط (١) تقارب التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ يوجد $A_0 > Max(a,0)$ ويتحقق :

$$\left|\int_A^{\ell} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L} \quad , \quad \left|\int_{\ell}^{A'} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

بالتالي

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| = |g(A)|\,.\left|\int_A^{\ell} f(x)dx\right| + |g(A')|.\left|\int_{\ell}^{A'} f(x)dx\right|$$

$$< l\left(\frac{\varepsilon}{2L}\right) + l\left(\frac{\varepsilon}{2L}\right) = \varepsilon$$

التكامل محدد وحسب المبرهنة يكون التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ متقارب.

معيار ديريكليه لدراسة تقارب تكامل معتل :

لتكن $f(x), g(x)$ تابعان معرفان على المجال $[a, +\infty[$ ، يكون التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ متقارباً إذا تحقق ما يلي :

١- التابع $f(x)$ قابل للمكاملة على كل مجال من الشكل $[a, A]$ ومحدود حيث $A > a$ والتكامل $\int_a^A f(x)dx$ محدد أي $\left|\int_a^A (x)dx\right| < L$ من أجل جميع قيم $a < A$

٢- التابع $g(x)$ مطرد و يحقق أن : $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

مثال : ادرس التكامل : $\lambda, a > 0$: $I = \int_a^\infty \frac{sinx}{x^\lambda} dx$

نستخدم معيار ديريكليه حيث يكتب التكامل المعطى بالشكل :

$$I = \int_a^\infty \underbrace{Sinx}_{f(x)} \underbrace{\frac{1}{x^\lambda}}_{g(x)} dx$$

نلاحظ أن :

$$\left|\int_a^A f(x)dx\right| = \left|\int_a^A sinx\, dx\right| = |[-cosx]_a^A|$$

$$= |cosa - cosA| \underbrace{\leq}_{|x-y|\leq|x|+|y|} |cosa| + |cosA| \underbrace{\leq}_{|cos\theta|\leq 1} 1 + 1 = 2$$

و بالتالي فإن التابع $f(x) = sinx$ قابل للمكاملة على هذا المجال ، من جهة أخرى فإن التابع $g(x) = \frac{1}{x^\lambda}$ متناقص و يحقق أن $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ بالتالي و حسب معيار ديركليه يكون التكامل

$$I = \int_1^\infty \frac{sinx}{x^\lambda} dx \quad : \lambda > 0$$

متقارباً .

((بنفس الأسلوب تتم دراسة التكامل
$((I = \int_1^\infty \frac{cosx}{x^\lambda} dx \quad : \lambda > 0$

تعريف : نقول عن التكامل $\int_a^\infty f(x)dx$ إنه متقارب باطلاق إذا و فقط إذا كان التكامل $\left|\int_a^\infty f(x)dx\right|$ متقارباً

ملاحظة : التكاملين $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ و $\int_{a_1}^{+\infty} f(x)$ حيث $a_1 > a$ و f مستمر على $[a,\infty[$ متقاربان معاً أو متباعدان معاً .

التكامل بطريقة التجزئة في التكاملات المعتلة :

ليكن لدينا التابعان $u(x), v(x)$ تابعين معرفين ومستمرين وقابلين للاشتقاق و مشتقاتهما مستمرة على المجال $[a,\infty[$ عندئذٍ تنص قاعدة التكامل بالتجزئة في التكاملات المعتلة من النوع الأول على ما يلي :

$$\boxed{\int_a^{\infty} u(x).\,dv(x) = [u(x)v(x)]_a^{\infty} - \int_a^{\infty} v(x)\,du(x)}$$

$$= [u(\infty)v(\infty) - u(a)v(a)] - \int_a^{\infty} v(x)\,du(x)$$

تغير المتحول في التكاملات المعتلة :

ليكن لدينا التكامل المعتل من النوع الأول : $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ عندئذٍ و بوضع $x = \varphi(t) \Leftarrow dx = \varphi'(t)dt$ فإذا كان $\varphi(a) = \alpha \,, \varphi(\infty) = \beta$ حيث $\alpha, \beta \in [-\infty, +\infty]$ عندئذٍ نكتب :

$$I = \int_a^{\infty} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt$$

◁ لاحظ أنه من الممكن أن تكون $\alpha = \infty$ or $\beta = \infty$ لذا كتبنا أن $\alpha, \beta \in [-\infty, +\infty]$

تمرين :

أوجد قيمة التكامل : $n \in N$: $I_n = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt$

نكامل بطريقة التجزئة إذ نفرض :

$$u = t^n \quad \Rightarrow \quad du = nt^{n-1}dt$$
$$dv = e^{-t}dt \quad \Rightarrow v = -e^{-t}$$

فيكون :

$$I_n = \underbrace{[-t^n e^{-t}]_0^{\infty}}_{=0} + n\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-t}dt$$

و لحساب التكامل الأخير أيضاً نطبق طريقة التكامل بالتجزئة إذ نفرض :

$$u = t^{n-1} \Rightarrow du = (n-1)t^{n-2}dt$$
$$dv = e^{-t}dt \Rightarrow v = -e^{-t}$$

و بالتالي يكون :

$$I_n = n\left(\underbrace{[-t^{n-1}e^{-t}]_0^\infty}_{0} + (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}dt\right) = n(n-1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}dt$$

فنلاحظ أنه في البداية وصلنا إلى أن :

$$I_n = nI_{n-1}$$

و من ثم وجدنا أن :

$$I_n = n(n-1)I_{n-2}$$

لذا نكمل بطريقة التجزئة إلى أن نصل إلى :

$$I_n = n(n-1)(n-2)\ldots .2.1I_0 = n!\underbrace{\left(\int_0^\infty e^{-t}dt\right)}_{\substack{=1 \\ \text{ذلك من تحقق}}} = \boxed{n!}$$

تمرين(هام) :

ادرس تقارب التكامل : $a > 0$: $\int_a^\infty \frac{sinx}{x}dx$

نكامل بالتجزئة :

$$u = \frac{1}{x} \Longrightarrow du = -\frac{1}{x^2}dx$$
$$dv = sinx \Longrightarrow v = -cosx$$

ومنه :

$$I = \int_a^\infty \frac{sinx}{x}dx = \left[-\frac{cosx}{x}\right]_a^\infty - \int_a^\infty \frac{cosx}{x^2}dx = \frac{cosa}{a} - \int_a^\infty \frac{cosx}{x^2}dx$$

و التكامل الأخير متقارب بسبب ما يلي :

$$\frac{cosx}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

فحسب معيار المقارنة و لكون $\int_a^\infty \frac{1}{x^2} dx$ يكون التكامل $\int_a^\infty \frac{cosx}{x^2} dx$ متقارباً و بالتالي التكامل المعطى :

$$\int_a^\infty \frac{sinx}{x} dx \qquad : a > 0$$

متقارب.

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد أنس القزاز – لانا شهاب