الاربعاء ١ تشرين٢ ٢٠١٧م
١٢ صفر ١٤٣٩هـ

المحاضرة العاشرة

مبرهنة (٢٨) R حلقة واحدية تبديلية اذا وجد $M_1, M_2, \dots, M_k \in M\text{-spec}(R)$ تحقق $M_1 M_2 \cdots M_n = \{0\}$ فإن R نوثرية اذا وفقط اذا كانت R آرتينية

$$R \supseteq M_1 \supseteq M_1M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_1M_2\cdots M_k = \{0\}$$

$$I_0 := R \qquad I_i := M_1M_2\cdots M_i \quad 1 \le i \le k$$

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_k$$

I_{i-1}/I_i مودول جزئي في R/I_i معرف على الحقل R/M_i

R/I_0 نوثري $\Leftrightarrow$ I_0/I_1 , I_1 نوثري

$\Leftrightarrow$ I_1/I_2 , I_2 نوثري

$\Leftrightarrow$ I_{i-1}/I_i نوثري $\quad 1 \le i \le k$

ومنه I_{i-1}/I_i فضاء شعاعي منتهي التوليد

$\Leftrightarrow$ I_{i-1}/I آرتيني $\Leftrightarrow$ $I_0 = R$ آرتيني

مثال: اثبت ان $R = \frac{R[x]}{\langle x^2 \rangle}$ ارتيني.

ان R حقل وهي نوثرية $\Leftarrow$ $R[x]$ نوثرية

عندئذ $\frac{R[x]}{\langle x^2 \rangle}$ نوثري،

وبما انه $\exists \langle \bar{x} \rangle \in \mathcal{Y}\text{-}Spec(R)$ يحقق

$\langle \bar{x} \rangle . \langle \bar{x} \rangle = \langle \bar{x}^2 \rangle = \{0\}$

$\Leftarrow$ R ارتيني.

مبرهنة (٤) " Hopkin's theorem "

R حلقة واحدية تبديلية

ان R ارتينية اذا وفقط اذا كانت R نوثرية و $\dim(R)=0$

$\Leftarrow$ بما ان R ارتينية فانه حسب المبرهنات السابقة لدينا

$J(R) = N(R)$ $\qquad \dim R = 0$

$\exists n \in N$ $\qquad N(R)^n = \{0\}$.

$\mathcal{Y}\text{-}spec(R) = \{\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 - - - - - , \mathcal{Y}_k\}$.

$$\exists n \in N \quad \{0\} = N(R)^n = J(R)^n = \left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{Y}_i\right)^n \supseteq$$

$$(\mathcal{Y}_1 . \mathcal{Y}_2 - - - - \mathcal{Y}_k)^n = \mathcal{Y}_1^n \mathcal{Y}_2^n - - - \mathcal{Y}_k^n \supseteq \{0\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Y}_1^n \mathcal{Y}_2^n \mathcal{Y}_3^n - - - - - \mathcal{Y}_k^n = \{0\} \Rightarrow R \text{ نوثرية}$$

$\Leftarrow$ يؤول الى الفصل الرابع من المقرر

صفحة ٧٠

مثال: اثبت ان $R=\frac{R[x]}{\langle x(x-1)\rangle}$ ارتينية باستخدام Hopkin's theorem.

$$M\text{-}Spec(R)=\{\langle\bar{x}\rangle , \langle\overline{x-1}\rangle\}$$

$$\bar{0}=\langle\overline{x(x-1)}\rangle \subseteq \langle\bar{x}\rangle$$

لكن $\langle\overline{x(x-1)}\rangle$ ليس اولياً وذلك لان

$$\bar{x}(\overline{x-1}) \in \langle\overline{x(x-1)}\rangle$$

لكن $\bar{x}\notin\langle\overline{x(x-1)}\rangle$

$$(\overline{x-1})\notin\langle\overline{x(x-1)}\rangle$$

$$\Rightarrow \dim(R)=\{0\}$$

من جهة اخرى

R نوثرية $\Leftarrow$ R[x] نوثرية $\Leftarrow$ $\frac{R[x]}{\langle x(x-1)\rangle}$ نوثرية

عندئذ تكون R ارتينية حسب Hopkin's theorem

تمثل هندسياً

تمرين: لتكن السلسلة $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots \subsetneq I_n$ وكل من I_i يحوي مثالياً ولنفرض ان السلسلة لا تتقطع

* فاذا كانت $\dim R=0$ هل R نوثرية

/ /

** R نوثرية هل $\dim R < \infty$

** ليس بالضرورة ان يكون البعد منتهي
وذلك باستخدام مثال Nagata $R = \dfrac{R[x_i, i \in N]}{I}$
$; I = \langle x_1, x_2^2, x_3^3, \dots \rangle$

$$\operatorname{Spec}(R) = \left\{ \frac{\langle x_i, i \in N \rangle}{I} \right\}$$

مبرهنة (٢,١) Structure of Artainean Ring

اي حلقة آرتينية تكتب على شكل مجموع مباشر منتهي لحلقات محلية وآرتينية.

R آرتينية $\quad M\text{-}\operatorname{spec}(R) = \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$

$$R = M_i + M_j \qquad i \neq j$$

$$\exists\, n \in N \ni \quad \{0\} = N(R)^n = J(R)^n = \left(\bigcap_{i=1}^{k} M_i\right)^n \supseteq M_1^n M_2^n \cdots M_k^n$$

$$M_i = \sqrt{M_i^{n_i}} \qquad M_j = \sqrt{M_j^{n_j}}$$

$$m = \max\{n, n_1, \dots, n_k\}$$
$$\{0\} = M_1^m \cdot M_2^m \cdots M_k^m$$

/ /

$\gamma_i = \sqrt{\gamma_i^m}$ $\qquad$ $\gamma_j = \sqrt{\gamma_j^m}$

$1 = R = \gamma_i + \gamma_j = \sqrt{\gamma_i^m} + \sqrt{\gamma_j^m} \subseteq \sqrt{\gamma_i^m + \gamma_j^m}$

$\Rightarrow 1 \in \sqrt{\gamma_i^m + \gamma_j^m}$

$\Rightarrow 1 \in \gamma_i^m + \gamma_j^m \Rightarrow R = \gamma_i^m + \gamma_j^m$

بسبب مبرهنة الباقي الصينية

$\{0\} = \bigcap_{i=1}^{k} \gamma_i^m = \prod_{i=1} \gamma_i^m$

$R = R/\langle 0 \rangle = R/\bigcap_{i=n} \gamma_i^m = R/\prod \gamma_i^m = \oplus R/\gamma_i^m$

مباد منتهي للحلقات المحلية الآرتينية

ملاحظة: R حقل فإن كل مثالي من الشكل

$\gamma = \langle x+b \rangle \lhd R[x]$

$= \langle x+a, y+b \rangle \lhd R[x]$

يكون اعظمي لكنه ليس وحيد.

انتهت المحاضرة العاشرة

اذا صفعك شخص بخنجر لسانه فلا تصفعه بنفس الخنجر

ما دام بإمكانك قتله بسيف ابتسامتك.

المحاضرة الحادية عشرة — الاثنين ١٧ صفر ١٤٣٩هـ
٦ تشرين ٢ ٢٠١٧م

الفصل الثالث: التحليل الابتدائي

تعريف: $Q \trianglelefteq I \trianglelefteq R$ مثالي ابتدائي
حلقة دامرية تبديلية — مثالي في R

* نسمي Q مثالي ابتدائي Priamary ideal اذا وفقط اذا تحقق احد الشروط

$\boxed{1}$ $Q \neq R$; $\{a,b \in R \;,\; a.b \in Q \Rightarrow a \in Q \vee b \in \sqrt{Q}\}$.

$\boxed{2}$ $Q \neq R$, $\{a,b \in R \quad a.b \in Q \quad a \in Q \vee \exists n \in N \;\; b^n \in Q\}$

قاسم صفري

$\boxed{3}$ $R/Q \neq \bar{0} \quad \bar{b} \in R/Q$ zero divizor $\Rightarrow \bar{b} \in N(R/Q)$

* اذا كان Q مثالي ابتدائي فانه يسمى (يرمزله) P-priamary حيث $P = \sqrt{Q}$

* نقول عن المجموعة $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_r\}$ من المثاليات الابتدائية في R انها تحليل ابتدائي Priamary Decomposition للمثالي I اذا وفقط اذا تحقق $I = \bigcap_{i=1} Q_i$

* اذا كان $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_r\}$ تحليل ابتدائي المثالي I في R فانه يسمى مختزل اصغري اذا وفقط اذا تحقق
$$\bigcap_{i \neq j} Q_j \subseteq Q_i \quad , \quad \sqrt{Q_i} \neq \sqrt{Q_j} \;\; ; \; i \neq j$$

ملاحظة: كل مثالي اولي هو ابتدائي لكن العكس غير صحيح بالضرورة

Galaxy

/ /

$I = \langle 60 \rangle \trianglelefteq Z$

$I = \langle 2^2 . 3 . 5 \rangle$

$= \langle 2^2 \rangle \cap \langle 3 \rangle \cap \langle 5 \rangle$

ان المجموعة $\{ \langle 2^2 \rangle , \langle 3 \rangle , \langle 5 \rangle \}$ تحليل ابتدائي لـ I

ابتدائي لكنه غير اولي

مبرهنة (٣-١) اذا كانت R حلقة هي PID و $\{0\} \neq Q \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$

فإن Q مثالي ابتدائي في R $\Longleftrightarrow Q = \langle p^n \rangle$ حيث $n \in N$ و p عنصر اولي

$\Leftarrow$ $\exists\, q \in R \quad Q = \langle q \rangle$

$\exists\, p_1, p_2 \ldots p_r \in R$ عناصر اولية في R

وتحقق $q = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$

نفرض جدلا $r > 1$

$a = p_1^{\alpha_1} \quad b = p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_r^{\alpha_r}$

$$q = a.b \in Q \Rightarrow \begin{cases} a = p_1^{\alpha_1} \in Q = \langle q \rangle = \langle p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r} \rangle \\ \vee \\ b = p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} \in \sqrt{Q} = \langle p_1 p_2 \ldots p_r \rangle \end{cases}$$

$q = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$

$$\Rightarrow \begin{cases} q \mid a = p_1^{\alpha_1} \mid q \\ \vee \\ p_1 \mid p_1 p_2 \ldots p_r \mid b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a = q \\ \vee \\ p_1 \mid b \end{Bmatrix}$$ وهذا تناقض كونه $r > 1$

لا يمكن لعنصر اولي ان يقسم جداء عناصر اولية

/ /

عندئذٍ لعرض الحد الجبري خاطئ، $r = 1$

$\boxed{\Rightarrow}$ P عنصر أولي في R، $\exists n \in N$ $Q = \langle P^n \rangle$

$x.y \in Q = \langle P^n \rangle \Rightarrow P^n / x.y$

$$\begin{cases} K \leq n & P^k / x \Rightarrow x \in \sqrt{Q} \\ \vee & \\ K \leq n & P^k \nmid x \Rightarrow P^n / y \Rightarrow y \in Q \end{cases}$$

عندئذٍ Q مثالي ابتدائي

مبرهنة (٣٢) إذا كان Q مثالي ابتدائي في R فإن $\sqrt{Q}$ أصغر مثالي أولي يحوي Q

لأن $\sqrt{Q} \neq R$ لأنه "لو كانت $R = \sqrt{Q}$ فإن $1 \in \sqrt{Q}$

$\exists n \in N$ $1^n = 1 \in Q \Rightarrow Q = R$

وهذا غير ممكن وذلك لأن Q ابتدائي"

عندئذٍ $x.y \in \sqrt{Q}$ $x, y \in R$

$\exists n \in N$ $(x.y)^n \in Q \Rightarrow x^n y^n \in Q$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^n \in Q \\ \vee \\ \exists m \in N \quad (y^n)^m \in Q \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in \sqrt{Q} \\ \vee \\ y \in \sqrt{Q} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{Q} \text{ مثالي أولي}$$

وهو الأصغر لأن

تقاطع المثاليات الأولية في R: $\sqrt{Q} = \bigcap P$

$Q \subseteq P \in Spec(R)$

Galaxy

00

سؤال هل عكس المبرهنة صحيح " $\sqrt{Q}$ اولي فهل Q ابتدائي "

مبرهنة (٣٣) لتكن R حلقة واحدية تبديلية و $S \subseteq R$ مغلقة ضربياً و $Q \subsetneq R$ فإن الشروط التالية محققة :

$\boxed{1}$ $\sqrt{Q}$ اعظمي فإن P_Priamary

$\boxed{2}$ اذا كان r اعظمي $\in R$ فإن r^n r_Praimary $\exists n \in N$

$\boxed{3}$ اذا كان Q P_Primary و $a \in R/Q$
فإن $(Q:a)$ هو P_Praimary

$\boxed{4}$ اذا كان Q P_primary فإنه
* اذا كان $P \cap S \neq \phi$ فإن $S^{-1}Q = S^{-1}R$
** اذا كان $P \cap S = \phi$ فإن $S^{-1}Q \cap R = Q$
و $S^{-1}Q$ هو $\sqrt{S^{-1}Q}$ _Primary

ملاحظة:

$\{P \; ; \; P \in spec(R)\} \overset{\text{تقابل}}{\Longleftrightarrow} \{S^{-1}P \; ; S^{-1}P \in spec(S^{-1}R)\}$
بشرط $P \cap S = \phi$

انتهت المحاضرة الحادية عشرة

ان صاحب الحق قد لا يحسن اظهار حقه
اما صاحب الباطل فيجيد دائماً اخفاء باطله