حل أسئلة الدورات

أسئلة الدورة الفصلية الأولى 2016

أجب عن الأسئلة التالية مع ضرورة التقييد بالرموز التي بنص السؤال :

السؤال الأول 60 درجة : توزع 30 للسؤال الأول و10 للسؤال الثاني و 20السؤال الثالث .

١. لتكن $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} M" \longrightarrow 0$ متتالية تامة من التشاكلات المودولية و المودولات المعرفة على حلقة A وليكن N مودول على الحلقة A . المطلوب : أثبت بالاعتماد على التعريف فقط أن المتتالية التالية :

$0 \longrightarrow Hom_A(N,M') \xrightarrow{g_*} Hom_A(N,M) \xrightarrow{h*} Hom_A(N,M")$ تامة عند الحد $Hom_A(N,M)$.

٢. ليكن M مودول حر و منتهي التوليد معرف على حلقة رئيسية تبديلية . برهن أن M مودول بلا فتل

٣. برهن أن أبراج جوردان هولدر لأي مودول M معرف على حلقة A هي سلاسل نظامية أعظمية أي لا تمتلك تغطية فعلية لها .

السؤال الثاني 40 درجة :

١. لتكن $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f_1} M \xrightarrow{g_1} M" \longrightarrow 0$ و $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f_2} N \xrightarrow{g_2} N" \longrightarrow 0$ متتاليتين تامتين من التشاكلات المودولية على حلقة A . نعرف $f_1 \times f_2$ بانه التشاكل المودولي من $M' \times N'$ الى $M \times N$ بحيث : $f_1 \times f_2(x,y) = (f_1(x)$ و $f_2(y))$ من اجل كل $(x,y) \in M' \times N'$ وبالمثل نعرف التشاكل $g_1 \times g_2$ المطلوب إثبات أن المتتالية التالية :

$0 \longrightarrow M' \times N' \xrightarrow{f_1 \times f_2} M \times N \xrightarrow{g_1 \times g_2} M" \times N" \longrightarrow 0$ تامة عند الحد $M \times N$.

٢. ليكن N و M مودوليين على حلقة A لنرمز ب C للحلقة الجزئية من A المكونة من العناصر $a \in A$ بحيث $ab = ba$: وذلك مهما يكن $b \in A$: لنأخذ المجموعة $Hom_A(M,N)$ ونزودها بالعلاقتين الجمع المعرف ب $f + g: M \to N; (f+g)(x) = f(x) + g(x)$ والضرب الذي مجموعة مؤثراته الحلقة C المعرف كما يلي : $\lambda. f: M \to N; (\lambda. f)(x) = \lambda f(x)$ وذلك مهما يكن $f,g \in Hom_A(M,N)$ ومهما يكن $\lambda \in C$ اذا علمت أن$(Hom_A(M,N),+)$ تشكل زمرة تبديلية والمطلوب :

- هل قانون الضرب المعرف سابقا يشكل قانون تشكيل خارجي على المجموعة $Hom_A(M,N)$ ؟ وهل تشكل $Hom_A(M,N)$ مودول على الحلقة C ؟ اذا كان الجواب نعم فبرهن ذلك واذا كان الجواب لا فأعطي التعليل المناسب .
- في الطلب السابق اذا اشترطنا أن الحلقة A حلقة تبديلية فماذا تستنتج ؟

انتهت الأسئلة

حل الدورة الفصلية الأولى 2016

١) لكي تكون المتتالية(2) تامة عند الحد $Hom_A(N,M)$حسب التعريف يجب أن نبرهن أن $Img_* = Kerh_*$
أي لنبرهن أن $Img_* \subseteq Kerh_*$ و $Kerh_* \subseteq Img_*$.

$$\forall u \in Img_*; \exists v \in Hom_A(N,M'): g_*(v) = gov = u$$

$$h_*(u) = hou = ho(gov) = (hog)ov$$

وبما أن المتتالية (1) تامة فهي تامة عند الحد M أي $Img = Kerh$

ولكننا نعلم أن $Img \subseteq Kerh \Leftrightarrow hog = 0 \dots *$ بما أن (1) تامة فانه سيكون حسب $*$ $hog = 0$ وبالتالي :

$h_*(u) = (hog)ov = 0ov = 0 \Rightarrow u \in kerh_*$ وبالتالي فإن$Img_* \subseteq kerh_*$ ولنبرهن الان على الاحتواء المعاكس: $\forall u \in kerh_*;\ h_*(u) = 0 \Rightarrow hou = 0:$ وحسب $*$ يكون لدينا: $Imu \subseteq kerh$

ولدينا المتتالية (1) تامة فان $Img = kerh$ وعليه فان $Imu \subseteq Img$

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[d, "g"] \\ N \arrow[ur, dashed, "w"] \arrow[r, "u"'] & M \end{tikzcd}$$

لدينا: $g: M' \longrightarrow M, u: N \longrightarrow M$ ولنحاول ايجاد تشاكل w يجعل

المخطط التالي تبديلي أي لنوجد تشاكل $w: N \longrightarrow M'$ بحيث يكون

$$g_*(w) = \mathrm{gow} = \mathrm{u}$$

نلاحظ ان : $\forall n \in N; u(n) \in Imu \subseteq Img \Rightarrow \exists m' \in M': g(m') = u(n)$

وبالتالي يمكننا تعريف العلاقة: $w: N \longrightarrow M'$

$$n \longrightarrow w(n) = m' \ : \ u(n) = g(m')$$

ان w تشاكل مودولي ويحقق المراد ولنبين كل ذلك w تطبيق لان :

$$\forall n_1, n_2 \in N: n_1 = n_2 \Rightarrow u(n_1) = u(n_2)$$

$$\Rightarrow \exists m'_1, m'_2 \in M': u(n_1) = g(m'_1), u(n_2) = g(m'_2)$$

$$\Rightarrow g(m'_1) = g(m'_2) \xRightarrow{\text{متباين}g} m'_1 = m'_2 \Rightarrow w(n_1) = w(n_2)$$

حيث قلنا بان g متباين لان المتتالية (١)تامة .

ان g تشاكل مودولي لان:

$$\forall n_1, n_2 \in N, \forall \alpha, \beta \in A; u(\alpha n_1 + \beta n_2) = \alpha u(n_1) + \beta u(n_2)$$

لكن $Imu \subseteq Img$ ومنه يوجد m'_1, m'_2 من M' بحيث يكون

$$u(n_1) = g(m'_1), u(n_2) = g(m'_2)$$

$$\Longrightarrow\ u(\alpha n_1 + \beta n_2) = \alpha u(n_1) + \beta u(n_2) = \ \alpha g(m'_1) + \beta g(m'_2) = g(\alpha m'_1 + \beta m'_2)$$

لان g تشاكل مودولي وبالتالي يكون لدينا حسب تعريف w :

$$w(\alpha n_1 + \beta n_2) = \alpha m'_1 + \beta m'_2 = \alpha w(n_1) + \beta w(n_2)$$

ومنه يكون $w \in Hom_A(N, M')$ ويحقق $g_*(w) = u$: وذلك لان :

$$\forall n \in N; gow(n) = g\big(w(n)\big) = g(m') = u(n) \Longrightarrow gow = g_*(w) = \mathrm{u}$$

أي اصبح لدينا $u \in Img_*$ ومنه $Kerh_* \subseteq Img_*$ ومن الاحتوائين الذين تم برهانهما نجد ان :

$Kerh_* = Img_*$ ومنه المتتالية (٢)تامة عند الحد $Hom_A(N, M)$ وهو المطلوب .

٢) $Tor(M) = 0 \Leftrightarrow M$ مودول بلا فتل .

أي لنبرهن أن $\boldsymbol{Tor(M) = 0}$

لدينا M مودول حر اذاً توجد قاعدة منتهية ل M ولتكن $S = \{m_1, m_2, \dots\dots, m_n\} \subseteq M$

ليكن $m \in Tor(M)$ ومنه

$$m \in Tor(M) \Longrightarrow m \in M\ \wedge\ \exists a \in A^*: a.m = 0$$

وبالتالي $m \in M$ و S قاعدة ل M

$$\Longrightarrow \exists a_1, , , , , , a_n \in A$$

$$m \underbrace{=}_{*} a_1 m_1 +, , , , , , + a_n m_n$$

ولدينا

$$a.m = 0$$

$$0 = a(a_1 m_1 +, , , , , , + a_n m_n) = a(a_1 m_1) + \cdots + a(a_n m_n)$$
$$0 = (a a_1) m_1 + \cdots + (a a_n) m_n$$

وبما أن S قاعدة ل M فهي مستقلة خطيا أي سيكون : $a a_i = 0$ وذلك ايا كان $i = 1,2, \dots\dots, n$

وكون A حلقة تبديلية رئيسية أي هي منطقة تكاملية (لاتحوي قواسم الصفر) و $a \neq 0$ فيكون : $\forall i = a_i = 0$ $1,2, \dots\dots, r$ وبالتعويض في * نجد أن

$$m = 0 \Longrightarrow Tor(M) = 0$$

ومنه M مودول بلا فتل .

٣) برهن أن أبراج جوردان هولدر لأي مودول M معرف على حلقة A هي سلاسل نظامية أعظمية أي لاتمتلك تغطية فعلية لها .

ملاحظة : وجود كلمة هي في نص المسألة تعني (إذا وفقط إذا)

ليكن M مودول على A

$\Leftarrow$ ليكن $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_r = 0$ ...(s) برج جولدن هولدر ل M عندها $M_i/_{M_{i+1}}$ مودول بسيط بحيث $i \in \{1,2,\dots,r-1\}$ لنفرض وجود N مودول جزئي من M بحيث

$M_i \supset N \supset M_{i+1}$ ومنه يكون: $\frac{M_i}{M_{i+1}} \supset \frac{N}{M_{i+1}}$ ولكن: $M_i/_{M_{i+1}}$ مودول بسيط مهما تكن $i \in \{1,2,\dots,r-1\}$

وبالتالي يكون: $\frac{N}{M_{i+1}} = 0$ او $\frac{N}{M_{i+1}} = \frac{M_i}{M_{i+1}}$ أي ان : $N = M_{i+1}$ او $N = M_i$.

وهذا يبين لنا انه لا توجد تغطية فعلية ل (s) (s تغطية لنفسه) وبالتالي (s) سلسلة نظامية أعظمية

$(\Rightarrow)$ لتكن $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_r = 0$ ...(s)سلسلة نظامية أعظمية ل M

ولنبرهن على أن (s) برج جولدن هولدر أي لنبرهن أن $M_i/_{M_{i+1}}$ مودول بسيط من أجل كل $i \in \{1,2,\dots,r-1\}$

لنفرض جدلا على وجود $i \in \{1,2,\dots,r-1\}$ بحيث يكون المودول $M_i/_{M_{i+1}}$ ليس بسيط عندها يكون يوجد مودول جزئي P من $M_i/_{M_{i+1}}$ بحيث يكون $0 \subsetneq P \subsetneq M_i/_{M_{i+1}}$ وحسب مبرهنة التقابل بين المودولات الجزئية من $M_i/_{M_{i+1}}$ والمودولات الجزئية من M_i والتي تحوي M_{i+1} فانه يوجد مودول جزئي N من M_i بحيث

$M_{i+1} \subsetneq N \subsetneq M_i$ وبالتالي فانه يمكن ايجاد تغطية فعلية ل (s) وهذا يناقض كون (s) سلسلة أعظمية وبالتالي يكون الفرض الجدلي خاطئ ومنه $M_i/_{M_{i+1}}$ مودول بسيط مهما يكن $i \in \{1,2,\dots,n\}$ وهذا يعني أن (s) برج جولدن هولدر ل M .

السؤال الثاني:

١) لنضع ما يلي :

$$(1)\dots\ 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f_1} M \xrightarrow{g_1} M'' \longrightarrow 0$$

$$(2)\dots 0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f_2} N \xrightarrow{g_2} N'' \longrightarrow 0$$

المتتالية (3) تامة عند الحد $M \times N \Leftrightarrow Imf_1 \times f_2 = kerg_1 \times g_2$

لدينا: $Imf_1 \times f_2 = \{f_1 \times f_2(m', n') : (m', n') \in M' \times N'\}$

$$Imf_1 \times f_2 = \{(f_1(m'), f_2(n')): m' \in M', n' \in N'\}$$

$$Imf_1 \times f_2 = Imf_1 \times Imf_2$$

ولدينا أيضا $kerg_1 \times g_2 = \{(m,n) \in M \times N: g_1 \times g_2(m,n) = (0,0)\}$

$$kerg_1 \times g_2 = \{(m,n) \in M \times N: \big(g_1(m), g_2(n)\big) = (0,0)\}$$

$$kerg_1 \times g_2 = \{(m,n) \in M \times N: (g_1(m) = 0 \wedge g_2(n) = 0\}$$

$$kerg_1 \times g_2 = \{(m,n) \in M \times N: m \in kerg_1 \wedge n \in kerg_2 \ \}$$

$$kerg_1 \times g_2 = kerg_1 \times kerg_2$$

وبما أن المتتاليتين (1) و (2) تامتين يكون لدينا

$Imf_1 = kerg_1$ و $Imf_2 = kerg_2$

ومنه $Imf_1 \times f_2 = Imf_1 \times Imf_2 = kerg_1 \times kerg_2 = kerg_1 \times g_2$

أي ان المتتالية (3) تامة عند الحد $M \times N$

٢) إن قانون الضرب المعرف هو قانون تشكيل خارجي على المجموعة $Hom_A(M,N)$ وذلك لان :

$$\forall m_1, m_2 \in M, \forall \alpha \in A$$

ان λf تطبيق لأن $m_1 = m_2$ بما أن f تطبيق لأن $f \in Hom_A(M,N)$ فان

$$f(m_1) = f(m_2)$$

نضرب ب $\lambda \in A$ من اليسار فنجد $\lambda f(m_1) = \lambda f(m_2)$

$$(\lambda f)m_1 = (\lambda f)m_2$$

ومنه λf تطبيق والان لنثبت أن λf تشتكل مودولي :

الشرط الأول :

$$(\lambda f)(m_1 + m_2) = \lambda\big(f(m_1 + m_2)\big) = \lambda f(m_1) + \lambda f(m_2)$$
$$= (\lambda f)(m_1) + (\lambda f)(m_2)$$

الشرط الثاني :

$$(\lambda f)(\alpha m_1) = \lambda(f(\alpha m_1)) = \lambda.(\alpha f(m_1)) = \alpha.(\lambda f(m_1)) = \alpha.(\lambda f)(m_1); \lambda \in C$$

وهكذا نجد أن القانون المعرف هو قانون تشكيل خارجي لان $\lambda f \in Hom_A(M,N)$ أي :

$$.: C \times Hom_A(M,N) \longrightarrow Hom_A(M,N)$$

وايضا $(Hom_A(M,N),+,\ .)$ مودول على الحلقة C لان

$$\forall f,g\in Hom_A(M,N),\forall\alpha,\beta\in C$$

١.فانه لدينا من الفرض $(Hom_A(M,N),+)$ زمرة تبديلية .

٢.قانون الضرب الذي مجموعة مؤثراته C يحقق مايلي :

$$\forall\alpha,\beta\in C,\forall f,g\in Hom_A(M,N)$$

$$\underline{1_c.f=f}$$

تذكر انه يتساوى تطبيقان (تشاكلان)اذا كان لهما نفس المنطلق ونفس المستقر وقاعدة الربط ذاتها

$$\forall m\in M;(1_c.f)(m)=1_c.f(m)=1_A.\underbrace{f(m)}_{\in N}=f(m)\Longrightarrow 1_c.f=f$$

$$\underline{\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g}$$

$$\forall m\in M;\big(\alpha(f+g)\big)(m)=\alpha\big((f+g)(m)\big)=\alpha\big(f(m)+g(m)\big)$$

$$=\alpha\, f(m)+\alpha\, g(m)=(\alpha f)(m)+(\alpha g)(m)$$

$$\underline{(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f}$$

$$\forall m\in M;((\alpha+\beta)f)(m)=(\alpha+\beta)\big(f(m)\big)=\alpha f(m)+\beta f(m)$$

$$=(\alpha f)(m)+(\beta f)(m)$$

$$\underline{(\alpha.\beta)f=\alpha.(\beta f)}$$

$$\forall m\in M;((\alpha.\beta)f)(m)=(\alpha.\beta)\big(f(m)\big)=\alpha\big(\beta f(m)\big)=\alpha((\beta f)(m))$$

و هذا يبين أن $Hom_A(M,N)$ مودول على C .

- في الطلب السابق اذا اشترطنا أن الحلقة A حلقة تبديلية فماذا تستنتج ؟

نلاحظ أن الحلقة الجزئية C من A هي مجموعة العناصر التي تتمتع بالصفة التبديلية في A

$$\forall x,y\in C;xy=yx$$

فلو اشترطنا أن تكون الحلقة A تبديلية عندئذ يكون $A\ =C$ وينتج عن ذلك مباشرة $Hom_A(M,N)$ هي $A-$ مودول .

انتهى حل الدورة

أسئلة الدورة الفصلية الثانية 2016

أجب عن الأسئلة التالية مع ضرورة التقييد بالرموز التي بنص السؤال :

السؤال الأول 60 درجة : توزع 20 درجة لكل سؤال .

- ليكن M مودول على حلقة A ولنأخذ $\{M_i\}_{i=1}^{n}$ أسرة منتهية من المودولات الجزئية من M. أثبت صحة التكافؤ التالي: المودول $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ اسقاطي $\Leftrightarrow$ المودولات M_i اسقاطية وذلك مهما تكن $i = 1,2 \dots n$
- ليكن M مودول على حلقة A وليكن N مودول جزئي منه بحيث أن المودوليين N و $\frac{M}{N}$ يملكان برجي جوردان هولدر والمطلوب أثبت أن المودول M يملك برج جوردان هولدر .
- لتكن $\{N_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات على حلقة A وليكن P مودول على نفس الحلقة . أثبت صحة التماثل التالي : $Hom_A(\bigoplus_{i\in I} N_i, P) \cong \prod_{i\in I} Hom_A(N_i\,, P)$.

السؤال الثاني 40 درجة .

- لتكن B و A حلقتين وليكن $f: A \to B$ تشاكل حلقي ما برهن وبشكل مفصل صحة مايلي : اذا كان M مودول على الحلقة B فان M مودول على الحلقة A .
- لدينا المتتالية التالية من التشاكلات المودولية $0 \to 2Z \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} \frac{Z}{2Z} \to 0$ بحيث $f(x) = x$ و $g(y) = y + 2Z$ وذلك مهما يكن $x \in 2Z$ و $y \in Z$. والمطلوب بين فيما اذا كانت هذه المتتالية تامة أم لا ؟ وفيما اذا كانت منشطرة أم لا ؟ مع البرهان الكامل .

- لدينا المتتالية التامة $0 \to \frac{Z}{2Z} \xrightarrow{f} \frac{Z}{4Z} \xrightarrow{g} \frac{Z}{2Z} \to 0$ حيث $f(x + 2Z) = 2x + 4Z$ و $g(x + 4Z) = x + 2Z$ وذلك مهما يكن $x, y \in Z$

بين فيما اذا كانت هذه المتتالية منشطرة أم لا ؟ مع البرهان الكامل .

انتهت الأسئلة تمنياتي لكم بالنجاح د. نور غازي

حل الدورة الفصلية الثانية 2016

السؤال الأول :

١) ليكن M مودول على حلقة A ولنأخذ $\{M_i\}_{i=1}^{n}$ أسرة منتهية من المودولات الجزئية من M. أثبت صحة التكافؤ التالي: المودول $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ اسقاطي $\Leftrightarrow$ المودولات M_i اسقاطية وذلك مهما تكن $i = 1,2 \dots n$

$\Leftarrow$ بفرض $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ إسقاطي ولنثبت أن M_i اسقاطي

(سنقوم بتثبيت ال i واثبات صحة المبرهنة من أجلها وبالتالي ستكون المبرهنة صحيحة مهما يكن $i = 1,2,\dots,n$)

لدينا $M \xrightarrow[]{g \text{ غامر}} N \longrightarrow 0$ متتالية تامة من التشاكلات المودولية والمطلوب اثبات أن :

$$g_* : Hom_A(M_i, M) \longrightarrow Hom_A(M_i, N) \text{ غامر}$$

ليكن $f \in Hom_A(M_i, N)$ عنصر كيفي من المستقر والمطلوب اثبات أن

$$\exists w \in Hom_A(M_i, M) \ : \ g_*(w) = g \circ w = f$$

$$\begin{tikzcd}
 & M_i \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "w"'] & \\
M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

لنأخذ التشاكل الإسقاطي Pr_i وهو تشاكل غامر .

$$Pr_i : \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow M_i$$

لكن $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i = \prod_{i=1}^{n} M_i$ كون الاسرة منتهية

اذا يوجد تشاكل in_i تشاكل الاحتواء القانوني

$$in_i : M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$$

ولدينا $f \circ Pr_i \in Hom_A(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i, N)$

ومن كون $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ إسقاطي اذا من أجل كل

متتالية من الشكل $M \xrightarrow[]{g \text{ غامر}} N \longrightarrow 0$ تامة فإن

$$g_* : Hom_A(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i, M) \longrightarrow Hom_A(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i, N) \text{ غامر}$$

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^{n} M_i = \prod_{i=1}^{n} M_i \arrow[dd, "\widetilde{w}"'] \arrow[dr, shift left, "Pr_i"] \arrow[ddr, bend left, "f o Pr_i"] & & \\
 & M_i \arrow[ul, shift left, "in_i"] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "w"'] & \\
M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

اذا

$$\exists \breve{w} \in Hom_A(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i, M) \ : g_*(\breve{w}) = g \circ \breve{w} = f \circ Pr_i \qquad (*)$$

اذا $\breve{w} \circ in_i \in Hom_A(M_i, M)$ ولنرمز ب w ل $\breve{w} \circ in_i$ إن w تشاكل لأنه تركيب تشاكلين ومنه

وبقي اثبات أن $g \circ w = f$ $w \in Hom_A(M_i, M)$

$$g\;o\;w = \underbrace{g \circ \breve{w}\;o\;in_i}_{\text{التجميعية محققة}} \underbrace{=}_{\text{حسب *}} f \circ Pr_i \circ in_i = f \circ 1 = f$$

حيث : $Pr_i \circ in_i = 1$ (التطبيق المطابق). وبالتالي M_i إسقاطي مهما يكن $i = 1,2,\dots\dots,n$

<u>لنبرهن الاتجاه الثاني :</u>

$\Rightarrow$ بفرض M_i إسقاطي مهما يكن $i = 1,2,\dots\dots,n$

ولنبرهن أن $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ إسقاطي . لدينا

$M \xrightarrow{g\ \text{غامر}} N \longrightarrow 0$ متتالية تامة من التشاكلات المودولية

والمطلوب البرهان أن

$g_* : Hom_A(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i, M) \longrightarrow Hom_A(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i, N)$ غامر

ليكن $f \in Hom_A(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i, N)$ عنصر كيفي من المستقر والمطلوب اثبات أن

$$\exists v \in Hom_A(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i, M) \;:\; g_*(v) = g\;o\;v = f$$

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \arrow[dl, dashed, "v"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

لنأخذ تشاكل الأحتواء القانوني

$$in_i \;:\; M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$$

ولدينا $f\;o\;in_i \in Hom_A(M_i, N)$ ومن كون M_i إسقاطي مهما يكن $i = 1,2,\dots\dots,n$

اذا من أجل كل متتالية من الشكل $M \xrightarrow{g\ \text{غامر}} N \longrightarrow 0$ تامة فإن

$g_* : Hom_A(M_i, M) \longrightarrow Hom_A(M_i, N)$ غاموذلك مهما كانت $i = 1,2,\dots\dots,n$

اذاً $\exists v_i \in Hom_A(M_i, M) \;:\; g_*(v_i) = g\;ov_i = f\;o\;in_i$ ☺

وهذا محقق مهما يكن $i = 1,2,\dots\dots,n$ والان لنبني العلاقة

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[dl, "v_i"'] \arrow[d, "in_i"] \arrow[dr, bend left, "f\;o\;in_i"] & \\ M & \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \arrow[l, dashed, "v"'] \arrow[r, "f"] & N \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$v \;:\; \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow M$$

$$(m_1,\dots,m_n) \in \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \;:\; v(m_1,\dots,m_n) = v_1(m_1) + \;\dots\; + v_n(m_n)$$

والآن لنبرهن أن $g\;o\;v = \boldsymbol{f} \;:\; v \in Hom_A(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i, M)$

$$(m_1,\dots\dots,m_n),(m_1^1,\dots\dots,m_n^1) \in \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \;:\varphi,\beta \in A$$

إن v تطبيق لأن :

$$(m_1,\dots\dots,m_n) \underbrace{=}_{\text{المركبات المتقابلة متساوية}} (m_1^1,\dots\dots,m_n^1)$$

$$\Rightarrow m_i = m_i^1 \;:\; i = 1,2,\dots\dots,n \quad \text{وذلك مهما كانت}$$

$$\underbrace{\overset{\text{مهما يكن } i=1,2,\dots\dots,n}{\Rrightarrow}}_{\text{تطبيق } v_i} v_i(m_i) = v_i(m_i^1)$$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{لنأخذ المجموع}} \quad v_1(m_1)+\ \dots\dots.+v_n(m_n)=v_1(m_1^1)+\ \dots\dots.+v_n(m_n^1)$$

$$\Longrightarrow v(m_1,\dots\dots,m_n)=v(m_1^1,\dots\dots,m_n^1)$$

إن v تشاكل لأن :

$$v\big(\varphi(m_1,\dots\dots,m_n)+\beta(m_1^1,\dots\dots,m_n^1)\big)$$

$$=v\big((\varphi m_1,\dots\dots,\varphi m_n)+(\beta m_1^1,\dots\dots,\beta m_n^1)\big)$$

$$\underbrace{=}_{v\ \text{حسب تعريف}} \quad v_1(\varphi m_1+\beta m_1^1)+\ \dots\dots\dots+v_n(\varphi m_n+\beta m_n^1)$$

$$\underbrace{\overset{i=1,2,\dots\dots,n\ \text{مهما يكن}}{\equiv}}_{\text{كون } v_i \text{ تشاكل}} \varphi v_1(m_1)+\beta v_1(m_1^1)+\ \dots\dots\dots+\varphi v_n(m_n)+\beta v_n(m_n^1)$$

$$=\varphi\big(v_1(m_1)+\ \dots\dots+v_n(m_n)\big)+\beta\big(v_1(m_1^1)+\ \dots\dots+v_n(m_n^1)\big)$$

$$=\varphi v(m_1,\dots\dots,m_n)+\beta v(m_1^1,\dots\dots,m_n^1)$$

ومنه $v\in Hom_A(\bigoplus_{i=1}^{n}M_i,M)$ ولنبرهن أن $g\circ v=f$

لتكن $(m_1,\dots\dots,m_n)\ \in\bigoplus_{i=1}^{n}M_i$ عندئذ :

$$g\circ v(m_1,\dots\dots,m_n)=g\big(v(m_1,\dots\dots,m_n)\big)$$

حسب تعريف v نجد :

$$=g\big(v_1(m_1)+\ \dots\dots.+v_n(m_n)\big)\underbrace{=}_{g\ \text{تشاكل}}\ g\big(v_1(m_1)\big)+\ \dots\dots.+g\big(v_n(m_n)\big)$$

$$=g\circ v_1(m_1)+\cdots\dots\dots..+g\circ v_n(m_n)$$

$$☺\ \text{حسب}\ =f\circ in_1(m_1)+\ \dots\dots\dots+f\circ in_n(m_n)$$

$$=f\big(in_1(m_1)\big)+\ \dots\dots..+f\big(in_n(m_n)\big)$$

$$\underbrace{=}_{f\ \text{تشاكل}}\ f\big(in_1(m_1)+\cdots\dots..+in_n(m_n)\big)$$

$$\underbrace{=}_{in_i\ \text{حسب قاعدة ربط}}\quad f\big((m_1,0,\dots.,0)+\ \dots\dots..+(0,0,\dots\dots,m_n)\big)$$

$$=f(m_1,\dots\dots,m_n)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{g\circ v=f}$$

أي أن $\bigoplus_{i=1}^{n}M_i$ إسقاطي

٢) لنفرض $(S_N) : N = N_0 \supsetneq N_1 \supsetneq \dots \dots . \supsetneq N_t = 0$

$$\left(S_{M/N}\right) : \frac{M}{N} = U_0 \supsetneq U_1 \supsetneq \dots \dots . \supsetneq U_r = 0_{\frac{M}{N}} = N$$

هما برجي JH لـ N, M/N على الترتيب .

وبالتالي حسب مبرهنة التقابل بين المودولات الجزئية من M التي تحوي N و المودولات الجزئية من M/N نجد أنه لكل U_i يوجد مودول وحيد M_i مودول جزئي من M يحوي N بحيث

$$U_i = \frac{M_i}{N} \quad ; i = 0,1, \dots \dots . , r$$

وبالتالي نحصل على ما يلي :

$$: M \supsetneq M_1 \supsetneq \dots \dots \supsetneq M_r = N$$

بوصل هذه المتتالية من المودولات مع S_N نحصل على برج ل M

$$S_M : M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \dots \dots \supsetneq M_r = N = N_0 \supsetneq N_1 \supsetneq \dots \dots . \supsetneq N_t = 0$$

هي سلسلة نظامية للمودول M وكذلك عواملها بسيطة لأن :

$$\frac{M_i}{M_{i+1}} \cong \frac{\frac{M_i}{N}}{\frac{M_{i+1}}{N}} = \frac{U_i}{U_{i+1}} \quad : N \subset M_{i+1}$$

ولكن لدينا $\frac{U_i}{U_{i+1}}$ مودول بسيط لان $S_{M/N}$ برج JH ل M اذاً $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ مودول بسيط من اجل $i = 0,1, \dots , r-1$ وكذلك $\frac{N_j}{N_{j+1}}$ بسيط لان S_N برج JH وبالتالي S_M برج للمودول M و هو برج JH.

٣) لتكن $\{N_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات على حلقة A وليكن P مودول على نفس الحلقة . أثبت صحة التماثل التالي :

$$Hom\left(\bigoplus_{i\in I} N_i, P\right) \cong \prod_{i\in I} Hom(N_i , P) .$$

لنأخذ العلاقة $\delta : Hom\left(\bigoplus_{i\in I} N_i, P\right) \to \prod_{i\in I} Hom(N_i , P)$ بالشكل :

$$\forall f \in Hom\left(\bigoplus_{i\in I} N_i, P\right) ; \delta(f) = (foin_i)_{i\in I}$$

حيث in_i تشاكل التبيايين القانوني فنجد أن δ تطبيق لأن

$$\forall f,g \in Hom\left(\bigoplus_{i\in I} N_i, P\right): f = g \Longrightarrow \forall i\in I; foin_i = goin_i$$

ومنه $(foin_i)_{i\in I} = (goin_i)_{i\in I}$ وبالتالي يكون $\delta(f) = \delta(g)$

وكما أن التطبيق δ تشاكل زمري لأنه إذا كان $f,g \in Hom\left(\bigoplus_{i\in I} N_i, P\right)$ فإن

$$\delta(f+g) = ((f+g)oin_i)_{i\in I} = (foin_i + goin_i)_{i\in I}$$

$$= (foin_i)_{i\in I} + (goin_i)_{i\in I} = \delta(f) + \delta(g)$$

δ غامر لأنه ليكن $(g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Hom(N_i, P)$ عنصر كيفي من المستقر حيث

$g_i: M_i \to N\ ; i \in I$ تشاكل

فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد

$h: \bigoplus_{i\in I} N_i \to P$ يجعل المخطط تبادليا"

$$\begin{tikzcd} P & \\ N_i \arrow[u, "g_i"] \arrow[r, "in_i"'] & \bigoplus_{i\in I} N_i \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

أي $\forall i \in I: hoin_i = g_i$ وذلك لأن

$\left(\bigoplus_{i\in I} N_i, (in_i)_{i\in I}\right)$ جداء مرافق للأسرة $(N_i)_{i\in I}$

وبالتالي يكون (h) الموجود يحقق أنه ينتمي ل $Hom\left(\bigoplus_{i\in I} N_i, P\right)$ بحيث

$$\delta(h) = (hoin_i)_{i\in I} = (g_i)_{i\in I}$$

وبما أن h وحيد فيكون δ متباين وبناء على ماسبق يكون δ تماثل .

السؤال الثاني :

١) بفرض أن M مودول على الحلقة B أي يوجد قانون تشكيل داخلي وليكن $+: M \times M \to M$ بحيث $(m_1, m_2) \mapsto m_1 + m_2$ ويجعل البنيه $(M,+)$ زمرة تبديلية ولنأخذ قانون التشكيل الخارجي التالي الذي مجموعة مؤثراته الحلقة A على النحو التالي $*: A \times M \to M$ بحيث $(a, M) \mapsto a * m = f(a).m$ حيث القانون $(.)$ هو قانون التشكيل الخارجي الذي مجموعة مؤثراته B من الفرض حيث M هي مودول على B إذا لدينا $(M,+)$ زمرة تبديلية بقي أن نبرهن أن القانون $(*)$ يحقق موضوعات المودول الأربعة بالنسبة للقانون الثاني أي لنبرهن مايلي :

أيا كان $m, m' \in M$ وأيا كان $\alpha, \beta \in A$ فإن :

$$1]\ 1_A * m \underbrace{=}_{\text{حسب تعريف القانون}*} f(1_A).m \underbrace{=}_{f\text{تشاكل}} 1_B.m \underbrace{=}_{B\text{على}\ M\ \text{لأن مودول}} m$$

$$2](\alpha+\beta)*m = \underbrace{f(\alpha+\beta).m = [f(\alpha)+f(\beta)].m}_{\text{لأن } f \text{ تشاكل}} \underbrace{=}_{\text{لأن } M \text{ مودول على} B} f(\alpha).m+f(\beta).m$$

$$= \alpha*m+\beta*m$$

$$3]\alpha*(m+m') = f(\alpha).(m+m') = f(\alpha).m+f(\alpha).m' = \alpha*m+\alpha*m'$$

$$4]\alpha*(\beta*m) = f(\alpha).(\beta*m) = f(\alpha).(f(\beta).m) = \big(f(\alpha)f(\beta)\big).m$$

$$= f(\alpha.\beta).m = (\alpha*\beta)*m$$

ومما سبق نلاحظ أن $(M,+,*)$ مودول على الحلقة A .

٢) لنضع $0 \to 2Z \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} \frac{Z}{2Z} \to 0 \;..(I)$ نعلم أن (I) تامة $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} f \text{ متباين} \\ Imf = kerg \\ g \text{ غامر} \end{pmatrix}$

حيث f متباين هو الاحتواء (التباين) القانوني وكذلك g غامر لأنه تطبيق الغمر القانوني ل Z في $\frac{Z}{2Z}$

نواته هي $2Z$ أي $kerg = 2Z$ بقي أن نثبت أن $Imf = kerg$ حيث :

$$Imf = \{f(x): x \in 2Z\} = \{x: x \in 2Z\} = 2Z$$

اذن نلاحظ أن $Imf = kerg = 2Z$ ومما لاسبق نجد أن المتتالية (I) تامة .

- لنفرض جدلاً أنها منشطرة ومنه يوجد $s : \frac{Z}{2Z} \xrightarrow{\text{تشاكل مودولي}} Z \quad : \quad gos = 1$

$$x+2Z \longrightarrow x$$

وبالتالي $\bar{0} \in \frac{Z}{2Z}$: $s(\bar{0}) = 0$ وذلك لأن s تشاكل ومن جهة أخرى لدينا $\bar{0} = \bar{1}+\bar{1}$ ومنه

$$s(\bar{0}) = s(\bar{1}+\bar{1}) \underbrace{=}_{\text{تشاكل } S} s(\bar{1})+s(\bar{1}) \underbrace{=}_{\text{حسب قاعدة الربط}} 1+1 = 2 \Longrightarrow s(\bar{0}) = 2$$

أصبح لدينا $s(\bar{0}) = 0 \quad , \quad s(\bar{0}) = 2$ و هذا تناقض كون s تشاكل ومنه المتتالية غير منشطرة.

٣) لدينا المتتالية $0 \to \frac{Z}{2Z} \xrightarrow{f} \frac{Z}{4Z} \xrightarrow{g} \frac{Z}{2Z} \to 0$

تامة من الفرض ونلاحظ أن $\frac{Z}{4Z} \ncong \frac{Z}{2Z} \oplus \frac{Z}{2Z}$

نلاحظ ان $\frac{Z}{4Z}$ زمرة دوارة و $\frac{Z}{2Z} \oplus \frac{Z}{2Z}$ زمرة تبديلية وليست دوارة ومنه هذا التماثل غير صحيح والمتتالية غير منشطرة .

انتهى حل الدورة

أسئلة الدورة الفصلية الثالثة 2016

أجب عن الأسئلة التالية مع ضرورة التقييد بالرموز ضمن نص السؤال وبرهان ما هو مطلوب دن زيادة أو نقصان .

السؤال الأول :30 درجة : ليكن M مودول على حلقة A وليكن N مودول جزئي منه . والمطلوب برهن على وجود تقابل بين مجموعة المودولات الجزئية من $\frac{M}{N}$ وبين مجموعة المودولات الجزئية من M والتي تحوي N .

السؤال الثاني : 15 درجة: لتكن B و A حلقتين وليكن $f: A \to B$ تشاكل حلقي ما . برهن وبشكل مفصل صحة مايلي :

اذا كان M مودول على الحلقة B فإن M مودول على الحلقة A .

السؤال الثالث : 30 درجة : لدينا المخطط التالي من التشاكلات المودولية

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v"'] & M' \\ N & \end{tikzcd}$$

حيث f تشاكل مودولي غامر يحقق $kerf \subseteq kerv$.

والمطلوب إنشاء تشاكل مودولي $w: M' \to N$ بحيث $wof = v$.

السؤال الرابع : 25 درجة :

١) لنأخذ المتتالية التالية من التشاكلات المودولية على حلقة الاعداد الصحيحة

$$0 \to \frac{z}{2z} \xrightarrow{f} \frac{z}{6z} \xrightarrow{g} \frac{z}{3z} \to 0$$

حيث $f(x + 2z) = 3x + 6z$ و $g(y + 6z) = 2y + 3z$ وذلك مهما يكن : $x, y \in z$ بين فيما اذا كانت هذه المتتالية تامة أم لا ؟ منشطرة أم لا ؟ مع البرهان الكامل .

٢) ليكن p عدد أولي ما ولنأخذ المتتالية التالية من التشاكلات المودولية على حلقة الأعداد الصحيحة Z

$$0 \to \frac{z}{pz} \xrightarrow{f} \frac{z}{p^2z} \xrightarrow{g} \frac{Z}{pZ} \to 0$$

حيث $f(x + pz) = px + p^2z$ و $g(y + p^2z) = y + pz$ وذلك مهما يكن $x, y \in z$ بين فيما اذا كانت هذه المتتالية تامة أم لا ؟ منشطرة أم لا ؟ مع البرهان الكامل.

انتهت الأسئلة

حل الدورة الفصلية الثالثة 2016

السؤال الأول : من أجل $M \subseteq P \subseteq N$ بحيث P مودول جزئي من M يحوي N فإن $\frac{P}{N}$ مودول جزئي من $\frac{M}{N}$ لأن :

$$i) 0 + N \in \frac{P}{N} \Rightarrow \frac{P}{N} \neq \emptyset$$

$$ii) \forall \alpha, \beta \in A, \forall (P_1 + N), (P_2 + N) \in \frac{P}{N}; P_1, P_2 \in P$$

$$\alpha(P_1 + N) + \beta(P_2 + N) = \left(\alpha P_1 + N\right) + (\beta P_2 + N) = \left(\left(\alpha P_1 + \beta P_2\right) + N\right) \in \frac{P}{N}$$

حيث $\alpha P_1 + \beta P_2 \in P$ لأن P مودول جزئي من M .

وبفرض $f: X \to Y$ علاقة بحيث X مجموعة المودولات الجزئية من M والتي تحوي N و Y مجموعة المودولات الجزئية من $\frac{M}{N}$ وقاعدة ربط f هي $\forall P \in X; f(P) = \frac{P}{N}$

ان f تطبيق لأنه $\forall P_1, P_2 \in X$ بحيث $P_1 = P_2$

فإن $P_1 + N = P_2 + N$ أي $f(P_1) = f(P_2)$

ان f متباين ولبيان ذلك يجب أن نبرهن: $\forall P_1, P_2 \in X: \frac{P_1}{N} = \frac{P_2}{N} \Rightarrow \quad P_1 = P_2$

$$\forall x \in P_1; x + N \in \frac{P_1}{N} = \frac{P_2}{N} \Rightarrow x + N \in \frac{P_2}{N}$$

$$\Rightarrow \exists y \in P_2: x + N = y + N \xRightarrow{x \in x+N} x \in y + N \Rightarrow \exists n \in N: x = y + n$$

$$\Rightarrow \exists n \in N: x - y = n \Rightarrow x - y \in N \subseteq P_2$$

$$\Rightarrow \exists p \in P_2: x - y = p \Rightarrow x = y + p: y \in P_2, p \in P_2 \Rightarrow x \in P_2$$

ومنه $P_1 \subseteq P_2$ وبنفس الأسلوب نبرهن أن $P_2 \subseteq P_1$ فيكون: $P_1 = P_2$.

ان f غامر : ليكن Q مودول جزئي من $\frac{M}{N}$ ولنعرف المجموعة $U = \{x \in M: x + N \in Q\}$

إن U مودول جزئي من M ويحوي N أي $U \in X$ ولنبين ذلك :

Q مودول جزئي من $\frac{M}{N}$ أي $0_{\frac{M}{N}} = N = 0 + N \in Q$ ومنه $0 \in U$ أي أن $U \neq \emptyset$

$$\forall \alpha, \beta \in A. \forall x, y \in U; (\alpha x + \beta y) + N = \alpha \underbrace{(x + N)}_{\in Q} + \beta \underbrace{(y + N)}_{\in Q} \in Q$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in U$$

ومنه U مودول جزئي من M وهو يحوي N لأن :

$$n \in N \Rightarrow n + N \in Q \Rightarrow n \in U \Rightarrow N \subseteq U$$

$f(U) = Q$ ولنبين ذلك $f(U) = \{u + N: u \in U\} = \{u + N \in Q\} = Q$

السؤال الثاني محلول سابقا

السؤال الثالث : لدينا المخطط التالي من التشاكلات المودولية

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \downarrow{\scriptstyle v} & & \\ N & & \end{array}$$

حيث f تشاكل مودولي غامر يحقق $kerf \subseteq kerv$.

والمطلوب إنشاء تشاكل مودولي $w: M' \to N$ بحيث $wof = v$

لنأخذ العلاقة $w: M' \to N$ التي قاعدة ربطها $w(m') = v(m)$

بحيث $m' = f(m)$ ولنبرهن أن w هو التشاكل المنشود حيث w تطبيق

$$\forall m'_1, m'_2 \in M': m'_1 = m'_2 \xRightarrow{\text{غامر} f} \exists m_1, m_2 \in M: m'_1 = f(m_1), m'_2 = f(m_2)$$

$$\Rightarrow f(m_1)=f(m_2)\Rightarrow f(m_1)-f(m_2)=0\xRightarrow{\text{تشاكل } f} f(m_1-m_2)=0$$
$$\Rightarrow m_1-m_2\in kerf\subseteq kerv\Rightarrow v(m_1-m_2)=0\xRightarrow{\text{تشاكل} v} v(m_1)-v(m_2)=0$$
$$\Rightarrow v(m_1)=v(m_2)\Rightarrow w(m'_1)=w(m'_2)$$

كذلك w تشاكل

$$\forall \alpha,\beta\in A,\forall m'_1,m'_2\in M';\exists m_1,m_2\in M: f(m_1)=m'_1,f(m_2)=m'_2$$
$$\Rightarrow w(m'_1)=v(m_1),w(m'_2)=v(m_2)$$
$$f\big(\alpha m_1+\beta m_2\big)=\alpha f(m_1)+\ \beta\ f(m_2)=\alpha m'_1+\ \beta m'_2\in M'$$

ويكون حسب تعريفنا ل w

$$w\big(\alpha m'_1+\ \beta m'_2\big)=v\big(\alpha m_1+\beta m_2\big)=\alpha v(m_1)+\beta v(m_2)=\alpha w(m'_1)+\ \beta w(m'_2)$$

مما يبين أن w تشاكل مودولي ولنبرهن أنه يحقق أن $wof\ =v$

نلاحظ أن $wof: M\to N$ و $v: M\to N$ لهما نفس المنطلق ونفس المستقر ولنبرهن أن لهما نفس قاعدة الربط

$$\forall m\in M; wof(m)=w\big(f(m)\big)=w(m')=v(m)$$

السؤال الرابع :

١) لنضع $0\to\frac{z}{2z}\xrightarrow{f}\frac{z}{6z}\xrightarrow{g}\frac{z}{3z}\to 0\ ...\ (\mathrm{I})$ ونعلم أن (I) تامة $\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\text{متباين} f\\ \operatorname{Im} f=\ker g\\ \text{غامر} g\end{pmatrix}$

إن عناصر $\frac{z}{6z}$ هي: $\frac{z}{6z}=\{\bar0,\bar1,\bar2,\bar3,\bar4,\bar5\}$

وعناصر $\frac{z}{2z}$ هي: $\frac{z}{2z}=\{\bar0,\bar1\}$

وعناصر $\frac{z}{3z}$ هي : $\frac{z}{3z}=\{\bar0,\bar1,\bar2\}$

$\begin{cases}\bar0\xrightarrow{f}\bar0\\ \bar1\xrightarrow{f}\bar3\end{cases}$ متباين f

$\begin{cases}\bar0\xrightarrow{g}\bar0\\ \bar1\xrightarrow{g}\bar2\\ \bar2\xrightarrow{g}\bar1\\ \bar3\xrightarrow{g}\bar0\\ \bar4\xrightarrow{g}\bar2\\ \bar5\xrightarrow{g}\bar1\end{cases}$ غامر g

ونلاحظ أن $Imf\ =kerg$ لأن $kerg=\{\bar0,\bar3\}$ ، $Imf\ =\{\bar0,\bar3\}$

⟸المتتالية (I) تامة ولنثبت أنها منشطرة لدينا التماثل $\frac{z}{6z}\cong\frac{z}{2z}\oplus\frac{z}{3z}$

وذلك صحيح حسب نظرية البواقي الصينية والتي تنص على أن

$$m,n \text{ أوليان بينهما فيما } \frac{\mathbb{Z}}{m.n\mathbb{Z}}\cong\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\oplus\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$$

٢) لنضع $(I) \ldots 0 \to \frac{z}{pz} \xrightarrow{f} \frac{z}{p^2z} \xrightarrow{g} \frac{z}{pz} \to 0$ ونعلم أن (I) تامة $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} f \text{ متباين} \\ Imf = kerg \\ g \text{ غامر} \end{pmatrix}$

حيث f متباين لأن $kerf = \{0 + PZ\}$ حيث وضوحا لدينا $\{0 + PZ\} \subseteq kerf$ لأن $kerf$ مودول جزئي من المنطلق ولنبرهن الاحتواء المعاكس

$$\forall x + PZ \in kerf; f(x + PZ) = Px + P^2Z = 0 + P^2Z$$

$$\Longrightarrow Px \in P^2Z \Longrightarrow x \in PZ \Longrightarrow \ x + PZ = PZ$$

وبذلك يكون $kerf \subseteq \{0 + PZ\}$ وعليه فإن $kerf = \{0 + PZ\}$ أي f متباين وكما أن g غامر بملاحظة ما يلي

$$\forall y + PZ \in \frac{Z}{PZ}; \exists y + P^2Z : g(y + P^2Z) = y + PZ$$

بقي أن نثبت أن $Imf = kerg$ حيث :

$$\forall z = y + p^2Z \in kerg; g(y + P^2Z) = y + PZ = Pz$$

$$\Longrightarrow y \in PZ \Longrightarrow \exists t \in Z: y = Pt \Longrightarrow z = y + p^2Z = Pt + P^2Z = f(t + P^2Z) \Longrightarrow z \in Imf$$

ومنه يكون $kerg \subseteq Imf$ والان ايا كان $y + p^2Z \in Imf$ فانه يوجد $x + PZ \in \frac{Z}{PZ}$ بحيث

$$f(x + PZ) = Px + P^2Z = y + P^2Z \Longrightarrow g(y + P^2Z) = g(Px + P^2Z) = Px + PZ = PZ$$

أي أن $y + P^2Z \in kerg$ ومنه $Imf \subseteq kerg$ وبالتالي يكون $Imf = kerg$ ومما سبق نجد أن المتتالية (I) تامة .

والأن لننظر فيما اذا كانت هذه المتتالية منشطرة أم لا حيث من أجل $P = 2$ تكون المتتالية هي

$0 \to \frac{Z}{2Z} \xrightarrow{f} \frac{Z}{4Z} \xrightarrow{g} \frac{Z}{2Z} \to 0$ وهي متتالية غير منشطرة لأننا نعلم أنه إذا كانت هذه المتتالية تامة و منشطرة فإن $\frac{Z}{4z} \cong \frac{Z}{2z} \oplus \frac{Z}{2z}$ ولكن هذا التماثل غير صحيح لأن $\frac{Z}{4z}$ زمرة دوارة و $\frac{Z}{2z} \oplus \frac{Z}{2z}$ زمرة تبديلية وليست دوارة ومنه المتتالية غير منشطرة من أجل $P = 2$ وبالتالي لن تكون منشطرة من أجل كل عدد أولي P

<u>*انتهى حل الدورة*</u>

أسئلة الدورة الفصلية الأولى2017

أجب عن الأسئلة التالية مع ضرورة التقيد بالرموز التي بنص السؤال وعدم برهان أي زيادة عن المطلوب

السؤال الأول 60 درجة : توزع 15 للسؤال الأول و15 للسؤال الثالث أما الثاني 10 والرابع 20 .

١) ليكن $h: M \to N$ تشاكل مودولي والمطلوب أثبت أن $M/Kerh \cong Imh$ (يجب اثبات أي مبرهنة تستخدمها).

٢) ليكن M مودول حر و منتهي التوليد معرف على حلقة رئيسية تبديلية A . برهن أن M مودول بلا فتل.

٣) لتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ اسرة من المودولات على الحلقة A . و P مودول على نفس الحلقة . نعلم أن المجموع المباشر $(\bigoplus_{i\in I} M_i , \{in_i\}_{i\in I})$ يشكل جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ والمطلوب برهن صحة مايلي :
$Hom_A(\bigoplus_{i\in I} M_i , P) \cong \prod_{i\in I} Hom_A(M_i, P)$ تماثل زمري

٤) لتكن $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} M'' \longrightarrow 0$ متتالية تامة من التشاكلات المودولية .والمطلوب برهن صحة التكافؤ التالي :المتتالية السابقة منشطرة اذا وفقط اذا $M = N \oplus kerh$ لاجل مودول معين N جزئي من M .

السؤال الثاني 40 درجة : توزع 10 للأول و10 للثاني و 15 للثالث و 5 للرابع .

١) حدد ثلاث زمر تبديلي ($Z-$ مودول) عن المرتبة $2^3 \times 3^3 \times 5^2$ مكتوبة بالشكل النظامي التالي $\frac{Z}{a_3 Z} \times \ldots\ldots \times \frac{Z}{a_1 Z}$ حيث $a_3|\ldots\ldots|a_1$.

٢) اكتب الزمرة التبديلية $G = \frac{Z}{72Z} \times \frac{Z}{84Z}$ على شكل مجموع مباشر لمقاطع P – أولية . ثم بين فيما اذا كانت الزمرة G تماثل الزمرة التبديلية $H = \frac{Z}{36Z} \times \frac{Z}{168Z}$.

٣) ليكن المخطط من التشاكلات المودولية التبديلي التالي سطراه وعموده متتاليتان تامتان والمطلوب أثبت أن

- التشاكل h هو التشاكل صفري .
- اذا علمت أن التشاكلين h, g' تشاكلين صفريين فأثبت أن h' تماثل .

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & N' \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[dr, "h"] & & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f_1"] \arrow[ur, "h'"] \arrow[dr, "g'"'] & M \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\pi_2"] & M'' \arrow[r] & 0 \\
 & & N'' \arrow[ur, "g"'] \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

٤) لنأخذ L مجموعة كل الاعداد العادية الموجبة تماما $r \in \mathbb{Q}^{*+}$ من الشكل $r = \frac{p}{q}$ حيث أن العددين q, p أعداد صحيحة تقبل القسمة فقط على الأعداد الأولية التالية 7,5,3,2 . إن هذه المجموعة تشكل زمرة تبديلية بالنسبة لقانوني الضرب المألوف وبالتالي تشكل مودول على $\mathbb{Z}$. والمطلوب بين وبالتفصل فيما اذا كان المودول L هو مودول حر ومنتهي التوليد أم لا ؟ (يمكنك الاعتماد على تعريف المودول الحر لحل التمرين).

انتهت الأسئلة

حل الدورة الفصلية الأولى 2017

السؤال الأول

١) لنفرض العلاقة $\tilde{h} : M/kerh \longrightarrow Imh$

$$m + kerh \longrightarrow \tilde{h}(m + kerh) = h(m)$$

$$\forall m_1 + kerh, m_2 + kerh \in M/kerh \quad ,\forall a, \beta \in A \ ,\forall m_1, m_2 \in M$$

$\tilde{h}$ تطبيق لأن : اذا كان $m_1 + kerh = m_2 + kerh$ نضيف للطرفين $-m_2 + kerh$

$$(m_1 - m_2) + kerh = kerh \implies m_1 - m_2 \in kerh$$

$$\implies h(m_1 - m_2) = 0$$

وبما أن h تشاكل فإن : $h(m_1) = h(m_2)$ ومنه $\tilde{h}(m_1 + kerh) = \tilde{h}(m_2 + kerh)$

$\tilde{h}$ تشاكل مودولي لأن : $\tilde{h}\big(a(m_1 + kerh) + \beta(m_2 + kerh)\big) = \tilde{h}\big((am_1 + \beta m_2) + kerh\big)$

$$= h(am_1 + \beta m_2) = ah(m_1) + \beta h(m_2) = a\tilde{h}(m_1 + kerh) + \beta\tilde{h}(m_2 + kerh)$$

$\tilde{h}$ متباين : اذا كان $h(m_1) = h(m_2)$

$$\implies h(m_1 - m_2) = 0$$

$$\implies m_1 - m_2 \in kerh \implies m_1 - m_2 = a \quad : a \in kerh$$

$$\implies m_1 = m_2 + a$$

$$\implies m_1 + kerh = m_2 + kerh$$

$\tilde{h}$ غامر : اذا كان $z \in Imh$ وبالتالي $h(m) = z \quad : \quad \exists m \in M$

وبالتالي $m + kerh \in M/kerh$ ومنه يمكن اخذ الصورة بالنسبة ل $\tilde{h}$

$$\implies \tilde{h}(m + kerh) = h(m) = z$$

ومنه

$$M/Kerh \cong Imh$$

٢) محلول مسبقاً في دورة ٢٠١٦ الأولى.

٣) لنبني العلاقة

$$\delta: \quad Hom_A(\bigoplus_{i\in I} M_i\,, P) \to \prod_{i\in I} Hom_A\,(M_i, P)$$

$$f \to \delta(f) = (f\ o\ in_i)_{i\in I}$$

- إنَّ δ تطبيق لأنَّ:

$$\forall\ f_1, f_2\ \in Hom_A(\bigoplus_{i\in I} M_i\,, P)\ ;\ \ f_1 = f_2$$

$$f_1\ o\ in_i = f_2\ o\ in_i \underbrace{\Rightarrow}_{i\in I \text{ تساوت المركبات المتقابلة}} (f_1\ o\ in_i)_{i\in I} = (f_2\ o\ in_i)_{i\in I}\ ;\ \forall i\in I$$

$$\Rightarrow \delta(f_1) = \delta(f_2)$$

- إنَّ δ تشاكل زمري (لذلك سنكتفي بشرط واحد) لأنَّ:

$$\delta(f_1+f_2) \overset{\text{حسب قاعدة الربط}}{\triangleq} \big((f_1+f_2)\ o\ in_i\big)_{i\in I} = (f_1\ o\ in_i)_{i\in I} + (f_2\ o\ in_i)_{i\in I}$$

$$= \ \delta(f_1) + \delta(f_2)$$

- إنَّ δ تقابل لأنَّ: ليكن $(g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Hom_A\,(M_i, P)$

عنصر كيفي من المستقر حيث $: i\in I$ $g_i: M_i \to P$ تشاكل

لكن $(\bigoplus_{i\in I} M_i, \{in_i\}_{i\in I}\}$ تشكل جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "in_i"] \arrow[d, "g_i"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[dl, dotted, "h"] \\ P & \end{tikzcd}$$

إذاً يوجد تشاكل وحيد: $h:\bigoplus_{i\in I} M_i \to P$: بحيث

$$h\ o\ in_i = g_i\ ;\ \forall\ i \in I \text{ ولكن } \delta(h) = (h\ o\ in_i)_{i\in I} = (g_i)_{i\in I}$$

أي يوجد h عنصر وحيد من المنطلق بحيث $\delta(h) = (g_i)_{i\in I} \quad \Leftarrow \delta$ تقابل

ومنه التماثل محقق ويتم المطلوب

٤) $\Leftarrow$ بفرض المتتالية $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\ g\ } M \xrightarrow{\ h\ } M'' \longrightarrow 0$ $(*)$ منشطرة أي أن :

$$\exists\ s: M'' \xrightarrow{\text{تشاكل مودولي}} M\ \ ;\ h\circ s = 1$$

ولنبرهن أن $M = Ims \oplus kerh$ أي يجب برهان أن $Ims + kerh = M$ و $Ims \cap kerh = 0$

وذلك بأخذ $N = Ims$ (لان Ims مودول جزئي من M).

مهما يكن $n \in M$ فإن : $n - s(h(n)) \in \ M$

$$\Rightarrow h\left(n - s(h(n))\right) \underbrace{=}_{h \text{ تشاكل}} h(n) - h\left(s(h(n))\right)$$

وبما أن $h \circ s = 1$ فإن :

$$= h(n) - h(n) = 0 \quad \Rightarrow n - s(h(n)) \in kerh$$

وبالتالي يوجد $\varphi \in kerh$ بحيث :

$$n - s(h(n)) = \varphi \quad \Rightarrow n = \underbrace{s(h(n))}_{\in Ims} + \underbrace{\varphi}_{\in kerh} \quad \in Ims + kerh$$

$$\Rightarrow M \ \subseteq Ims + kerh$$

وإن $Ims + kerh \ \subseteq M$ لأن $kerh$ و Ims مودولات جزئية في M ومن الاحتوائين نجد أن :

$$Ims + kerh = M$$

لنبرهن الشرط الثاني

$$Ims \cap kerh = 0$$

$$\beta \in Ims \cap kerh \quad \Rightarrow \beta \in Ims \quad , \quad \beta \in kerh$$

$$\Rightarrow h(\beta) = 0 \quad , \qquad \exists\, p \in M'' \ ; \beta = s(p)$$

$$0 = h(\beta) = h(s(p)) \underbrace{=}_{hos=1} p \Rightarrow p = 0$$

ومنه : $\beta = s(p) = s(0) \underbrace{=}_{s \text{ تشاكل}} 0$ ومنه نجد : $0 = Ims \cap kerh$

مما سبق نجد أن : $M = Ims \oplus kerh$

$\Rightarrow$ ليكن $M = N \oplus kerh$ والمطلوب إيجاد تشاكل مودولي $S : M'' \longrightarrow M$ بحيث $h \circ s = 1$

لنأخذ $h_{\backslash N}$ مقصور التشاكل h على N ولنبرهن أنه تماثل :

$$h_{\backslash N} : N \longrightarrow M''$$
$$n_1 \longrightarrow h_{\backslash N}(n_1) = h(n_1)$$

$h_{\backslash N}(n_1) = h(n_1)$ لان قاعدتا الربط متساويتين وذلك حسب تعريف المقصور

- إن $h_{\backslash N}$ تطبيق تشاكل وذلك حسب تعريف المقصور .
- إن $h_{\backslash N}$ متباين لأن :

لتكن $n_1, n_2 \in N$ و $h_{\setminus N}(n_1) = h_{\setminus N}(n_2)$

$$h(n_1) = h(n_2)$$

$$\text{تشاكل } h \Rightarrow h(n_1 - n_2) = 0 \Rightarrow n_1 - n_2 \in kerh$$

ولدينا $n_1 - n_2 \in N$ حسب الفرض وبما أن $M = N \oplus kerh$ مجموع مباشر فإن:

$$N \cap kerh = 0$$

$$n_1 - n_2 \in N \cap kerh \Rightarrow n_1 - n_2 = 0 \Rightarrow n_1 = n_2$$

- إن $h_{\setminus N}$ غامر لأنه : إن $(*)$ تامة فإن h غامر وبالتالي

$$p \in M'' \ ; \ \exists\, n \in \mathrm{M} \ ; h(n) = p \ \ldots\ldots (1)$$

وحسب *الفرض* $M = N \oplus kerh$

$$\forall n \in M \ \ ; \ \exists\, n_1 \in N \ \ ; \ \exists a \in kerh \Rightarrow n = n_1 + a$$

$$\Rightarrow p = h(n) = h(n_1 + a) = h(n_1) + h(a) = h(n_1) + 0$$

$$= h_{\setminus N}(n_1) + 0 = h_{\setminus N}(n_1) \ldots\ldots (2)$$

يكفي اثبات أن $h_{\setminus N}(n_1) = p$ *لكي يكون* $h_{\setminus N}$ *غامر*

لدينا $n_1 \in N$ *و* $p \underbrace{=}_{\text{حسب } 1} h(n) \underbrace{=}_{\text{حسب } 2} h(n_1) = h_{\setminus N}(n_1)$ وبالتالي $h_{\setminus N}$ غامر

وبالتالي $h_{\setminus N}$ تقابل وهو تشاكل لأنه مقصور لتشاكل $\Leftarrow$ $h_{\setminus N}$ تماثل .

إذاً يوجد $\left(h_{\setminus N}\right)^{-1}$ الذي هو التقابل العكسي لـ $\left(h_{\setminus N}\right)$ ونرمز له بـ s

$$s : M'' \longrightarrow M$$

$$\forall\, p \in M'' : \ s(p) = \left(h_{\setminus N}\right)^{-1}(p)$$

بقي علينا اثبات أن $hos = 1$ ومنه $\forall\, p \in M''$ فإن :

$$hos(p) = h(s(p)) = h\left(\underbrace{\left(h_{\setminus N}\right)^{-1}(p)}_{\in N}\right) = h_{\setminus N}\left(\left(h_{\setminus N}\right)^{-1}(p)\right) = h_{\setminus N} \circ \left(h_{\setminus N}\right)^{-1}(p) = p$$

ومنه إن التطبيق hos يصور كل عنصر بنفسه أي $hos = 1$ وبالتالي $(*)$ منشطرة.

السؤال الثاني

١) لنحدد ثلاث زمر التبديلية من المرتبة $2^3.3^3.5^2$

حيث : $a_1|\ldots\ldots|a_3$ ولندرس جميع الاحتمالات الممكنة حسب الجدول:

0	0	2	قوى 5
0	1	1	
0	0	3	قوى 3
0	1	2	
1	1	1	
0	0	3	قوى 2
0	1	2	
1	1	1	

نأخذ سطر من قوى 5 و سطر من قوى 3 وسطر من قوى 2 نجد أن :

$$(*) : \frac{Z}{2Z}\times\frac{Z}{(2\times 3)Z}\times\frac{Z}{(2\times 3\times 5^2)Z} \qquad (**) : \frac{Z}{2Z}\times\frac{Z}{(2^2\times 3^3\times 5^2)Z}$$

$$(***) : \frac{Z}{(2\times 3)Z}\times\frac{Z}{(2\times 3\times 5)Z}\times\frac{Z}{(2\times 3\times 5)Z}$$

٢) $G=\frac{Z}{72Z}\times\frac{Z}{84Z}$, $H=\frac{Z}{36Z}\times\frac{Z}{168Z}$

$$ord(G)=84Z=2^2.3.7Z$$
$$\Longrightarrow G=T(2)\oplus T(3)\oplus T(7)$$

$$84=2^2.3.7 \quad , \quad 72=2^3.3^2 \Longrightarrow G=\frac{Z}{2^3\times 3^2Z}\times\frac{Z}{2^2\times 3\times 7Z}$$

$$T(2)=\frac{Z}{2^3Z}\times\frac{Z}{2^2Z} \qquad T(3)=\frac{Z}{3^2Z}\times\frac{Z}{3Z} \qquad T(7)=\frac{Z}{7Z}$$

$$\Longrightarrow G=\frac{Z}{2^3Z}\times\frac{Z}{2^2Z}\oplus\frac{Z}{3^2Z}\times\frac{Z}{3Z}\oplus\frac{Z}{7Z}$$

$$168=2^3.3.7 \quad , \quad 36=2^2\times 3^2 \Longrightarrow H=\frac{Z}{2^2\times 3^2Z}\times\frac{Z}{2^3\times 3\times 7Z}$$

$$G=T'(2)\oplus T'(3)\oplus T'(7)$$

$$T'(2)=\frac{Z}{2^3Z}\times\frac{Z}{2^2Z} \qquad T'(3)=\frac{Z}{3^2Z}\times\frac{Z}{3Z} \qquad T'(7)=\frac{Z}{7Z}$$

$$\Longrightarrow H = \frac{Z}{2^3 Z} \times \frac{Z}{2^2 Z} \oplus \frac{Z}{3^2 Z} \times \frac{Z}{3Z} \oplus \frac{Z}{7Z}$$

ومنه $G \cong H$

٣) **لنثبت اولاً** أن h هو التشاكل الصفري . ليكن $x \in N'$
بما أن المخطط تبديلي فإن $h(x) = f_2 \, o \, \pi_1(x)$ ولكن أيضاً $f_2 = g \, o \, \pi_2$ بالتعويض ينتج مايلي
$$h(x) = g \, o \, (\pi_2 \, o \, \pi_1(x))$$
وأن $\pi_2 \, o \, \pi_1(x) = 0$ وذلك لان تركيب أي تشاكلين من متتالية تامة هو الصفر ومنه
$$h(x) = g \, o \, (0)(x)$$
ومنه $h = 0$

ثانياً : لنثبت أن h' تماثل .

- إن h' هو تطبيق تشاكل فرضاً . لنثبت أن h' متباين أي $kerh' = \{0\}$
ليكن $x \in kerh'$ فإن $x \in M'$ بحيث $h'(x) = 0$ ولنأخذ صورته بالنسبة ل π_1
$$\pi_1\big(h'(x)\big) = \pi_1(0) \Longrightarrow \pi_1 o h'(x) = 0_M$$
وكون المخطط تبديلي $f_1(x) = 0_M$

وأن f_1 تشاكل فإن $f_1(x) = f_1(0)$ وكون f_1 متباين لان المتتالية تامة يكون $x = 0$ أي أن h'متباين.

- لنثبت أن h' غامر : ليكن $n' \in N'$ ولنبرهن أنه $\exists m' \in M' \;:\; h'(m') = n'$
$$g' = \pi_2 o \, f_1 = 0 \quad \Longrightarrow \forall m' \in M' \;:\; \pi_2 o \, f_1(m') = 0$$
$$\Longrightarrow \pi_2\big(f_1(m')\big) = 0 \Longrightarrow f_1(m') \in ker\pi_2 = Img\pi_1$$
$$\Longrightarrow \exists n' \in N' \;:\; \pi_1(n') = f_1(m') \;\Longrightarrow \pi_1(n') = \pi_1 o h'(m') \Longrightarrow \pi_1(n') = \pi_1\big(h'(m')\big)$$

وبما أن π_1متباين كون المتتالية تامة فإن $h'(m') = n'$ أي أنه h'غامر ومنه فإن h' تماثل وتم المطلوب.

٤) لنأخذ $S = \{2,3,5,7\} \;:\; \forall x \in L \;:\; x = (2)^n.(3)^m.(5)^t.(7)^k$
ومنه S تولد L ولنثبت انها مستقلة خطياً أي أن :
$$0 = \left(n \underset{\text{قانون التشكيل الخارجي}}{\cdot} 2\right) \underset{\text{قانون التشكيل (الداخلي) المألوف}}{+} (m.3) + (t.5) + (k.7)$$
بالانتقال من قانون الداخلي الذي الحيادي فيه صفر للقانون الداخلي الذي الحيادي فيه 1 يكون
$$1 = (2)^n.(3)^m.(5)^t.(7)^k$$
وكون التحليل في $\mathbb{Z}$ وحيد فالأسس المتقابلة متساوية $n, m, t, k \in \mathbb{Z} \;:\; n = m = t = k = 0$

وحسب تعريف المودول الحر اذا كانت L منتهي التوليد ووجدت له قاعدة منتهية فيكون المودول حر.

انتهى حل الدورة

أسئلة الدورة الفصلية الثانية 2017

أجب عن الأسئلة التالية مع ضرورة التقيد بالرموز التي بنص السؤال وعدم برهان أي زيادة عن المطلوب

السؤال الأول 30 درجة :

١) ليكن M, M', M'' ثلاث مودولات على حلقة A ولتكن $0 \to M' \xrightarrow{g_1} M \xrightarrow{g_2} M'' \to 0$ متتالية تامة من التشاكلات المودولية ولنفرض P مودول على الحلقة A . المطلوب أثبت أن المتتالية التالية $0 \to Hom\,(M'', P) \xrightarrow{g_2^*} Hom(M, P) \xrightarrow{g_1^*} Hom(M', P)$ تامة عند الحد $Hom(M, P)$.

٢) لتكن $\{M_i\}_{i \in I}$ اسرة من المودولات على حلقة A والمطلوب برهن أن أي جداء مرافق لهذه الأسرة يماثل المجموع المباشر $\bigoplus_{i \in I} M_i$.

السؤال الثاني 40 درجة :

لتكن A حلقة تبديلية رئيسية وليكن $M = A^n$ مودول على الحلقة A ولنفرض N مودول جزئي من M . لاجل كل $u \in Hom(M, A)$ فإن المودول $u(N)$ يشكل مثالي رئيسي في الحلقة A أي له الشكل $u(N) = (a_u)$ لاجل a_u عنصر محدد من A . لنرمز ب Ω لمجموعة كل المثاليات من النمط السابق . إن المجموعة Ω تملك عنصر أعظمي وليكن $v(N) = (a_v)$ لأجل $v \in Hom(M, A)$ ليكن c' لعنصر من N يحقق $a_v = v(c')$ والمطلوب .

- اختر العبارات الصحيحة (إن وجدت) من بين العبارات التالية (مع برهان الصحيحة منها) :
  - a. مهما يكن $u \in Hom(M, A)$ فإن $a_u | v(c')$
  - b. مهما يكن $u \in Hom(M, A)$ فإن $a_u | a_v$
  - c. مهما يكن $u \in Hom(M, A)$ فإن $a_v | u(c')$
  - d. مهما يكن $u \in Hom(M, A)$ فإن $a_N | a_v$
  - e. مهما يكن $u \in Hom(M, A)$ فإن $a_u | u(c')$
- برهن (وبالتفصيل) أنه يمكن كتابة المودولات M و N على شكل مجموع مباشر لمودولات جزئية من المودول M

السؤال الثالث 30 درجة :

٥) لتكن A حلقة تبديلية رئيسية وليكن M مودول على الحلقة A . المطلوب اختر العبارة الصحيحة (مع البرهان):
  - a. المودول $M/Tor(M)$ مودول بلا فتل .
  - b. المودول $M/Tor(M)$ مودول فتل .
  - c. المودول $M/Tor(M)$ لايحقق أي مما سبق .

٦) بين فيما اذا كان بالإمكان انشاء متتالية منشطرة من الشكل (اذا كان جوابك نعم فأعطي الشروط التي يجب أن تحققها المتتالية حتى تكون منشطرة , واذا كان جوابك لا فأعطي التعليل المناسب)

$$0 \to \frac{Z}{16Z} \xrightarrow{f} \frac{Z}{8Z} \times \frac{Z}{12Z} \xrightarrow{g} \frac{Z}{6Z} \to 0$$

انتهت الأسئلة

حل الدورة الفصلية الثانية 2017

السؤال الأول

١) لنثبت أن : $Img_2^* = kerg_1^*$

ليكن $u \in Img_2^*$ عندئذ : $u \in Hom(M,P)$ وبالتالي حسب تعريف الصورة المباشرة:

$$\exists\, v \in Hom(M'',P):\ g_2^*(v) = v\circ g_2 = u$$

لنبرهن ان $g_1^*(u) = 0 \Leftrightarrow u \in kerg_1^*$

ولدينا: $(g_2\circ g_1) = 0$ كون المتتالية تامة و تركيب التطبيقات تجميعي فيكون

$$g_1^*(u) = u\circ g_1 = (v\circ g_2)\circ g_1 = v\circ (g_2\circ g_1) = v\circ 0 = 0$$

ومنه: $u \in kerg_1^*$ ومنه $Img_2^* \subseteq kerg_1^*$

لنثبت الاحتواء المعاكس: لتكن $u \in kerg_1^*$ عندئذ $u \in Hom(M,P)$ حيث $g_1^*(u) = uog_1 = 0$

ومنه $\underline{(١)}\quad kerg_2 \underbrace{=}_{\text{لان المتتالية تامة}} Img_1 \underbrace{\subseteq}_{\text{حسب مبرهنة سابقة}} keru$

والمطلوب اثبات أن $u \in Img_2^*$ أي أنه $\exists\, w \in Hom(M'',P):\ g_2^*(w) = wog_2 = u$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & M'' \arrow[dl, dotted, "w"] \\ P & \end{tikzcd}$$

M''

لنبني العلاقة w بحيث يكون المخطط تبديلي $w: M'' \longrightarrow P$

$g(m) = m'' :\quad m'' \to w(m'') = u(m)$

$\forall\, m_1'', m_2'' \in M''\ ;\ \forall\, \varphi, \beta \in A$

إن w تطبيق لأن: $m_1'' = m_2''$ بما أن g_2 غامر فإنه

$\exists\, m_1, m_2 \in M:\ g_2(m_1) = m_1'',\ g_2(m_2) = m_2''$ لدينا $m_1'' = m_2'' \Rightarrow g_2(m_1) = g_2(m_2)$

$$\Rightarrow g_2(m_1) - g_2(m_2) \underbrace{=}_{g_2\ \text{تشاكل}} g_2(m_1 - m_2) = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 \in kerg_2$$

وحسب $\underline{(١)}$ فإنه $m_1 - m_2 \in kerg_2 \subseteq keru$

$$\Rightarrow u(m_1 - m_2) = 0 \xrightarrow{u\ \text{تشاكل}} u(m_1) = u(m_2) \Rightarrow w(m_1'') = w(m_2'')$$

<u>إن w تشاكل</u>

$$g_2(am_1 + \beta m_2) = ag_2(m_1) + \beta g_2(m_2) = am_1'' + \beta m_2''$$

$$\Rightarrow w(am_1'' + \beta m_2'') = u(am_1 + \beta m_2) = au(m_1) + \beta u(m_2) = aw(m_1'') + \beta w(m_2'')$$

<u>أي أن w تشاكل</u>

لنتأكد من كون المخطط تبديلي لنثبت أن : $w \circ g_2 = u \implies g_2^*(w) = u$

$$\forall m \in M \quad : \quad w \circ g_2(m) = w\big(g_2(m)\big) \underbrace{=}_{w \text{ من طريقة بناء}} w(m'') = u(m)$$

$$\implies w \circ g_2(m) = u(m) \implies w \circ g_2 = u$$

ومنه نجد أنه تم اثبات وجود تشاكل w من M'' الى P بحيث يحقق $w \circ g_2 = u$ وبالتالي $u \in Img_2^*$

ومنه $Img_2^* \subseteq kerg_1^* \Leftarrow kerg_1^* = Img_2^*$ وبذلك يتم المطلوب.

٢) لنفرض $(C,\{f_i\}_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ ولنبرهن أن : $\bigoplus_{i\in I} M_i \cong C$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "in_i"'] & C \arrow[dl, dotted, "k"] \\ \bigoplus_{i\in I} M_i & \end{tikzcd}$$

عندئذ بما أن $(\bigoplus_{i\in I} M_i,\{in_i\}_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$

فإنه عندئذ يوجد تشاكل وحيد $\exists!\ h : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow C$

بحيث $\forall\, i \in I \ : \ h \circ in_i = f_i$ وكذلك لدينا $(C,\{f_i\}_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$

عندئذ يوجد تشاكل وحيد: $\exists!\ k : C \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$ بحيث $\forall\, i \in I \quad k \circ f_i = in_i$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "in_i"] \arrow[d, "f_i"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[dl, dotted, "h"] \\ C & \end{tikzcd}$$

أصبح لدينا $\bigoplus_{i\in I} M_i \underset{h}{\overset{k}{\rightleftarrows}} C$ ولدينا $\forall i \in I$: $h \circ in_i = f_i \ , \ k \circ f_i = in_i$

ولدينا $f_i = h \circ in_i = h \circ (k \circ f_i) = (h \circ k) \circ f_i$

$f_i = Id \circ f_i$ لكن h,k وحيدين بحيث ماسبق محقق اذاً $h \circ k = Id$

ومن جهة أخرى :

ولدينا $in_i = k \circ f_i = k \circ (h \circ in_i) = (k \circ h) \circ in_i$

$in_i = Id \circ in_i$ لكن h,k وحيدين بحيث ماسبق محقق اذاً $k \circ h = Id$

إذاً h تقابل و $h^{-1} = k$ وهو تشاكل $\Leftarrow h$ تماثل ومنه $\bigoplus_{i\in I} M_i \cong C$.

السؤال الثاني

- الإجابة الصحيحة هي c : مهما يكن $u \in Hom(M,A)$ فإن $u(c') = a_v \mid u(c')$ لأن $a_v, u(c') \in A$
  ومنه $d = gcd\big(a_v\, , u(c')\big)$ ومنه يوجد $\alpha, \beta \in A$ بحيث

$$d = \alpha . a_v + \beta . u(c')$$

$$d = \alpha v(c') + \beta u(c') = \underbrace{(\alpha v + \beta u)}_{W}(c')$$

ومنه $W = \alpha v + \beta u$ عنصر من $Hom(M,A)$ وبالتالي

$$\Rightarrow d = W(c') \in W(\grave{M}) = (a_W)$$

$$\Rightarrow d \in (a_W) \Rightarrow a_W | d$$

ولكن $d|u(c')$ و $d|a_v$ حسب تعريف gcd ومنه $a_W|d|a_v$ وبالتالي $a_W|a_v$

ومنه $(a_v) \subseteq (a_W)$

ولكن (a_v) مثالي أعظمي اذاً $(a_v) = (a_W)$ اذاً $a_W \in (a_v)$ وبالتالي

$\Rightarrow a_v|a_W \Rightarrow a_v|a_W|d|u(c')$ اذاً $a_v|u(c')$

- لنأخذ $u = Pr_1$ ومنه $a_v|P_{r_1}(c') \Rightarrow P_{r_1}(c') = a_v b_1 \ : \ b_1 \in A$

وهكذا باخذ $u = P_{r_i}$ نجد أن $a_v|P_{r_i}(c') \Rightarrow P_{r_i}(c') = a_v b_i \ : \ b_i \in A$

وبالتالي $c' = (a_v b_1, a_v b_2, \dots\dots, a_v b_n) = a_v(b_1, \dots\dots, b_n)$

لنرمز ب c للعنصر $(b_1, \dots\dots, b_n) \in A^n$ ومنه $c' = a_v.c$ وكذلك لنأخذ v للطرفين

$$v(c') = v(a_v.c) \Rightarrow a_v = a_v.v(c)$$

$$\Rightarrow v(c) = 1$$

والان لنبرهن أن

$$M = A.c \oplus kerv \qquad (1)$$
$$N = A.c' \oplus (kerv \cap N) \qquad (2)$$

لنثبت (1) أي أن $M = A.c + kerv$ وايضاً $A.c \cap kerv = 0$

$$m \in M \Rightarrow m = \underbrace{v(m).c}_{\in Ac} + (m - v(m).c)$$

وليتم المطلوب لنبرهن أن $m - v(m).c \in kerv$

$$v(m - v(m).c) \underset{v \text{ تشاكل}}{=} v(m) - v(m).v(c) = v(m) - v(m).1 = 0$$

$\Leftarrow M \subseteq Ac + kerv$ والاحتواء الاخر محقق كون $Ac, kerv$ مودولات جزئية من M

ومنه $M = Ac + kerv$ وأن $Ac \cap kerv = 0$

ليكن $x \in Ac \cap kerv \Rightarrow \begin{cases} x \in Ac \\ x \in kerv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha.c \ ; \ \alpha \in A & (\grave{1}) \\ v(x) = 0 & (\grave{2}) \end{cases}$

$$\Rightarrow 0 = v(x) = v(\alpha.c) = \alpha v(c) = \alpha.1 = 0$$

وذلك لان A منطقة تكاملية $1 \neq 0$ ومنه $\alpha = 0$

$$\Longrightarrow x = 0 \quad \Longrightarrow M = Ac \oplus kerv$$

لنثبت (2) أي أن $N = A.c' + (kerv \cap N)$ وايضاً $A.c' \cap (kerv \cap N) = 0$

$$\grave{m} \in N \ \Longrightarrow \grave{m} = v(\grave{m}).c + (m' - v(\grave{m}).c)$$

لنبرهن أن $v(\grave{m}).c \in A.c'$

$$v(\grave{m}).c \overset{\text{حسب } *}{=} \alpha.a_v.c = \alpha.c' \in A.c' \, ; \, \alpha \in A$$

$(v(\grave{m}) = \alpha.a_v \, : \, \alpha \in A \Longleftarrow v(\grave{m}) \in (a_v) \Longleftarrow v(\grave{m}) \in v(N) = (a_v)$ هي $(*)$حيث$)$

لنبرهن أن $(m' - v(\grave{m}).c) \in N \cap kerv$

$$m' - v(\grave{m}).c = m' - \alpha.a_v.c$$

وذلك لان $\alpha \in A \, :$ $v(\grave{m}) \in v(N) = (a_v) \Longrightarrow v(\grave{m}) = \alpha.a_v$

ومنه $m' - v(\grave{m})c = \underbrace{m'}_{\in N} - \underbrace{\alpha}_{\in A}\underbrace{c'}_{\in N} \in N$

$$= \underbrace{m}_{\in M'} - \underbrace{\alpha}_{\in A}\underbrace{a_v}_{\in M'} \in N$$

وايضاً $(m' - v(\grave{m}).c) \in kerv$ لان

$$v(\grave{m} - v(\grave{m}).c) = v(\grave{m}) - v(\grave{m}).v(c) = v(\grave{m}) - v(\grave{m}).1 = 0$$

$\Longleftarrow N \subseteq Ac' + (N \cap kerv)$ والاحتواء الاخر محقق أي ان$N = Ac' + (N \cap kerv)$

وأن $A.c' \cap (kerv \cap N) = 0$

ليكن $x \in Ac' \cap (kerv \cap N) \Longrightarrow \begin{cases} x = \beta.c' \; ; \; \beta \in A \\ x \in N \\ v(x) = 0 \end{cases}$

ومنه $0 = v(x) = v(\beta.c') = \beta.v(c') = \beta v(a_v.c) = \beta a_v.v(c) = \beta.a_v$

A هي منطقة تكاملية وأن $a_v \neq 0$ لانه مولد مثالي اعظمي اذاً $\beta = 0$ ومنه $x = 0$

$$\Longrightarrow N = Ac' \oplus (N \cap kerv)$$

السؤال الثالث

١) الإجابة الصحيحة هي(a)نريد اثبات أن $\frac{M}{Tor(M)}$ بلا فتل أي

$$Tor\left(\frac{M}{Tor(M)}\right) = 0_{M\backslash Tor(M)} = Tor(M)$$

ليكن $\tilde{m} \in Tor\left(\frac{M}{Tor(M)}\right) \Rightarrow \tilde{m} \in \frac{M}{Tor(M)}$ و $\exists a \in A^* : a.\tilde{m} = Tor(M)$

ومنه $\tilde{m} = m + Tor(M) \quad : \quad m \in M$

$$Tor(M) = a.\tilde{m} = a(m + Tor(M)) = a.m + Tor(M) \Rightarrow a.m \in Tor(M)$$

وبالتالي $\exists b \in A^* \quad : \quad b(a.m) = 0$ ولان التبديلية محققة $(ba)m = 0$ حيث $b.a \in A^*$

ومنه $m \in Tor(M)$ اذاً $\tilde{m} = m + Tor(M) = Tor(M)$ وبالتالي $Tor\left(\frac{M}{Tor(M)}\right) = Tor(M)$

٢) $0 \to \frac{Z}{16Z} \xrightarrow{f} \frac{Z}{8Z} \times \frac{Z}{12Z} \xrightarrow{g} \frac{Z}{6Z} \to 0$

لتكن $G = \frac{Z}{16Z} \oplus \frac{Z}{6Z} \cong \frac{Z}{16Z} \times \frac{Z}{6Z}$ و $H = \frac{Z}{8Z} \times \frac{Z}{12Z}$ وتكون المتتالية منشطرة $\Leftrightarrow G \cong H$

لنكتب الزمر التبديلية على شكل مجموع مباشر لمقاطع $T(P_i)$.

$$G \cong \frac{Z}{16Z} \times \frac{Z}{6Z} = \frac{Z}{2^4Z} \times \frac{Z}{2.3Z}$$

$$T(2) = \frac{Z}{2^4Z} \times \frac{Z}{2Z} \qquad T(3) = \frac{Z}{3Z}$$

$$H = \frac{Z}{8Z} \times \frac{Z}{12Z} = H = \frac{Z}{2^3Z} \times \frac{Z}{2^2.3Z}$$

$$T'(2) = \frac{Z}{2^3Z} \times \frac{Z}{2^2Z} \qquad T'(3) = \frac{Z}{3Z}$$

نلاحظ أن $T(2) \ncong T'(2)$ ومنه $G \ncong H$ ومنه المتتالية ليست منشطرة .

ولكن حتى يتم تطبيق هذه النتيجة يجب ان تكون المتتالية تامة وهذا هو الشرط اللازم توافره .

انتهى حل الدورة

إعداد: احمد أبو النوت – لانا شهاب – شهد الحايك البوشي