نظري

◄ دكتور المادة: حزة الحاكمي

◄ المحاضرة: التاسعة عشر ◄ عنوان المحاضرة: الزمر التبديلية المنتهية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـخواص المجموع المباشر للزمر.

٢ـ العلاقة بين المجموع المباشر والجداء المباشر.

٣ـ وسنبدأ ببحث جديد وهو: النظرية الأساسية للزمر التبديلية المنتهية.

لنبدأ الآن :)

خواص المجموع المباشر للزمر:

مبرهنة : لتكن G زمرة و H,K زمر جزئية ناظمية في G. إن الشروط الاتية متكافئة :

١) $G = H \times K$

٢) كل عنصر $g \in G$ يكتب بصورة وحيدة على الشكل :

$g = h.k$ حيث $h \epsilon H \quad , \quad k \epsilon K$

الاثبات :

(1 ← 2) لنفرض أن $G = H \times K$ عندئذ حسب التعريف $G = H.K$ ومنه :

$$\forall g \in G \,; g = h.k \;:\; h \in H \,, \quad k \in K$$

و لنفرض أن $g = h.k = h_1.k_1$ حيث $h_1 \in H \,, k_1 \in K$

$$h.k = h_1.k_1$$

$$h.k.k_1^{-1} = h_1$$

$$k.k_1^{-1} = h^{-1}.h_1 \in K \cap H = < e >$$

ومنه:

$$e = k.k_1^{-1} \quad \Rightarrow k = k_1$$

$$e = h^{-1}.h_1 \quad \Rightarrow h = h_1$$

ومنه g يكتب بشكل وحيد.

$(1 \leftarrow 2)$

لما كانت K, H زمر جزئية ناظمية في G فإن $H.K$ زمرة جزئية في G أي أن :

$$H.K \subseteq G$$

◀الاحتواء المعاكس :

ليكن $g \epsilon G$ عندئذ وحسب الفرض فإن

$$g = h.k \quad : \quad h \in H \quad , \quad k \in K$$

ومنه $g = h.k \in H.K$

وبالتالي : $G \subseteq H.K \Longleftarrow G = H.K$

لنثبت انه يساوي المحايد:

ليكن $x \in H \cap k$ ولنفرض جدلاً ان $x \neq e$ ومنه $x = h = k$ لانه ينتمي للزمرتين H, K ولتقاطعهم

حيث: $h \epsilon H \quad , \quad k \epsilon K$

ومنه فإن $h = k \Rightarrow \underbrace{h.k^{-1}}_{\in G} = e$

ولدينا من جهة أخرى $e.e = e$

اصبح لدينا عنصر من G يكتب بشكلين مختلفين وهذا يناقض الفرض الجدلي ومنه x هو المحايد وبالتالي :

$$H \cap K =< e >$$

$$\Rightarrow G = H \times K$$

- العلاقة بين المجموع والجداء: $\oplus$ جداء و $\times$ مجموع

مبرهنة: لتكن G زمرة وH, K زمر جزئية ناظمية في G عندئذ :

$$H \oplus K \cong H \times K$$

البرهان:

لنعرف العلاقة : $\varphi : H \oplus k \to H \times K$ بالشكل :

$$\varphi\big((h.R)\big) = h.R$$

♫نجد ان φ تطبيق ومتباين لأن :

$$\forall (h,R),(h_1,R_1) \in H\oplus K \quad : (h,R) = (h_1,R_1)$$

$$\Rightarrow h = h_1 \quad , R = R_1 \Rightarrow h.R = h_1,R_1 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\uparrow}^{\text{متباين}} \quad \underbrace{\downarrow}_{\text{تطبيق}}$$

$$\Rightarrow \varphi\big((h,R)\big) = \varphi\big((h_1,R_1)\big)$$

φ غامر لأن :

ليكن $h_0R_0 \in H\times K$ عندئذٍ $R_0 \in K$, $h_0 \in H$

ان $(h_0,R_0) \in H\oplus K$

ومنه$\varphi\big((h_0,R_0)\big) = h_0R_0$

φتشاكل لأن :

$$\varphi((h.R).(h_1.R_1)) = \varphi((h.h_1,RR_1)) = (hh_1)(RR_1) = h(h_1R)R_1 = h(Rh_1)R_1$$

$$= (hR)(h_1R_1) = \varphi(h.R).\varphi(h_1.R_1)$$

ومنه φ تماثل .

مبرهنة: لتكن G زمرة و H,K زمر جزئية ناظمية في G

اذا كان $G = H\times K$ عندئذٍ:

١) يوجد تشاكل زمري غامر : $f:\ G \longrightarrow H$

٢) يوجد تشاكل زمري غامر : $\pi\!:\mathrm{G} \longrightarrow k$

البرهان:

١) لنعرف العلاقة: $f:\ G \longrightarrow H$ بالشكل : $f(h.R) = h$

إن f تطبيق لأن اذا كان : $hR,h_1R_1 \in G \ : hR = h_1R_1$

فإن : $h = h_1 \quad , \quad R = R_1$

$$f(h.R) = f(h_1.R_1)$$

لكن f ليس متباين.

و f تشاكل لان: $f\big((h.R)(h_1R_1)\big) = f\big((h.h_1)(R.R_1)\big) = h.h_1$

$$= f(h.R).f(h_1.R_1)$$

f غامر لأن : $\forall h_0 \in H \;\; ; \;\; h_0 = h_0.e \in H \times k$

$$\Rightarrow f(h_0.e) = h_0$$

ومنه f تشاكل زمري غامر .

٢) بطريقة مشابهة تماماً ل ١ نبرهن ٢

سنبدأ في اول خطوة فعلية في دراسة الزمر.

النظرية الأساسية للزمر التبديلية المنتهية

مبرهنة : لتكن G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي P عندئذ يوجد في G عنصر مرتبته P

الاثبات :

لتكن G زمرة تبديلية منتهية ولنفرض ان :

لنفرض أن $m \in Z$: $(G : 1) = n = m.P$ حيث p عدد اولي.

سوف نورد البرهان بالاستقراء حسب m

اولاً: اذا كان $m = 1$ نجد ان $(G\colon 1) = P$

عندئذ فإن G دوارة ويوجد فيها عنصر مرتبته P

ثانياً : لنفرض أن المبرهنة صحيحة لأجل جميع الزمر الجزئية H **و المحتواة تماماً** في G. اي $H \nsubseteq G$

وتحقق شروط المبرهنة وهنا نميز حالتين :

١) يوجد في G زمرة جزئية $D \neq G$ دليلها لا يقبل القسمة على P عندئذٍ :
$m.P = (G\colon 1) = (G\colon D)(D\colon 1)$

وبما أن $(G:D)$ لا تقبل القسمة على P ومنه $(D:1)$ تقبل القسمة على P وحسب الفرض الاستقرائي يوجد في D عنصر مرتبته P وبالتالي G تحوي عنصر مرتبته P .

٢) جميع الزمر الجزئية H المحتوات تماما في G ادلتها تقبل القسمة على P .
لنفرض أن l هي مجموعة الزمر الجزئية H. ولنفرض أن k هو العنصر الأكبر في l من حيث عدد العناصر .

اي ان k اكبر زمرة جزئية في G مرتبتها تقبل القسمة على P وان $k \neq G$

وهنا نميز حالتين :

١- $(k:1)$ يقبل القسمة على p عندئذٍ وحسب الفرض الاستقرائي فإن k تحوي عنصر مرتبته p وبالتالي G تحوي عنصر مرتبته p

٢- $(k:1)$ لا تقبل القسمة على p بما ان $G \neq k$ فإنه يوجد:

$x \in G \ : x \notin k$

ولنفرض ان $T =< x >$ وان $(T:1) = t$

ان $k.T$ زمرة جزئية في G وان $k \subsetneq k.T$ ومنه فإن $G = k.T$

وحسب مبرهنة التماثل الثانية :

$$G = \frac{k.T}{k} \cong \frac{T}{k \cap T}$$

طالما الزمرتين متماثلتين فالمراتب لهما هي نفسها.

مرتبته

$$\left(\frac{k.T}{k}:1\right) = \left(\frac{T}{k \cap T}:1\right)$$

دليل

$$\Rightarrow (k.T:k) = (T:k \cap T)$$

نناقش جميع الزمر الجزئية التي ادلتها تقبل القسمة على P أي

- لما كان $(k.T:k)$ يقبل القسمة على P فإن : $(T:k \cap T)$ يقبل القسمة على P

ولما كان $(T:1) = (T:k \cap T)(k \cap T:1)$

فإن $(T:1) = t$ يقبل القسمة على P

أي ان t يقبل القسمة على P .

أي $\frac{t}{P} \in Z$ ومنه فإن :

$$O\left(x^{\frac{t}{P}}\right) = P \ , \qquad x^{\frac{t}{P}} \in T \subset G \Longrightarrow x^{\frac{t}{P}} \in G$$

ومنه G تحوي عنصر مرتبته P .

بالاعتماد على المبرهنة السابقة نستنتج ان : $P = \left(< x^{\frac{t}{P}} >: 1\right)$

نتيجة: ان كل زمرة تبديلية منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الاولي P . تحوي زمرة جزئية مرتبتها P

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا همج