◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄ المحاضرة الثالثة عشرة   عنوان المحاضرة : دراسة المتغيرات العشوائية

سوف نطرح في هذه المحاضرة مجموعة من التمارين :

تمرين (1) لتكن لدينا الدالة :

$$f_X(x)=\begin{cases}0 & ; x<0\\ x & ;\ 0\le x<1\\ \frac{1}{2} & ; 1\le x<2\\ 0 & ; 2\le x\end{cases}$$

1) برهن أنَّ $f_X(x)$ دالة كثافة احتمالية فعلية لمتغير عشوائي X .

2) أوجد $F_X(x)$ لـ X , ثم احسب $F(0.2)\ \&(1.5)$.

الحل

- لدينا فرضاً أنَّ $f_X(x)\ge 0$, فالشرط الأول محقق , ولنبرهن الشرط الثاني :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,.dx=\int_{-\infty}^{0}(0).dx+\int_0^1 x.dx+\int_1^2\frac{1}{2}.dx+\int_2^{+\infty}(0).dx$$

$$=0+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x}{2}\right]_1^2+0=0+\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)+0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

إذن $f_X(x)$ دالة كثافة فعلية لـ X .

- تعريفاً إنَّ : $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t).dt$

من أجل $t<0$ فإنَّ : $F_X(x)=\int_{-\infty}^{0}(0).dt=0$

من أجل $0\le t<1$ فإنَّ : $F_X(x)=\int_{-\infty}^{0}(0).dt+\int_0^x t\,.dt=0+\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=\frac{x^2}{2}$

من أجل $1\le t<2$ فإنَّ :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,.dt = \int_{-\infty}^{0} (0).dt + \int_{0}^{1} t.dt + \int_{1}^{x} \frac{1}{2}.dt$$

$$= 0 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t}{2}\right]_1^x = \frac{1}{2} + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{2}$$

من أجل $2 \le t$ فإنَّ :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,.dt = \int_{-\infty}^{0} (0).dt + \int_{0}^{1} t.dt + \int_{1}^{2} \frac{1}{2}.dt + \int_{2}^{x} (0).dt$$

$$= 0 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t}{2}\right]_1^2 + 0 = 1$$

فتصبح دالة التوزيع لـ X :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & ;\ 0 \le x < 1 \\ \frac{x}{2} & ; 1 \le x < 2 \\ 1 & ; 2 \le x \end{cases}$$

توضيح للرسم (غير مطلوب) : الجزء الأول من الشكل يمثل جزء من قطع مكافئ

وهو دال على المجال $0 \le x < 1$ ومعادلته : $F_X(x) = \frac{x^2}{2}$

معادلة قطع مكافئ " $y = \frac{x^2}{2}$ " .

ثم يلي الجزء الأول من الشكل القطعة المستقيمة وهي على المجال

$1 \le x < 2$ ومعادلته : $F_X(x) = \frac{x}{2}$ " $y = \frac{x}{2}$ " معادلة مستقيم .

والجزء الأخير مستقيم يوازي المحور ox وهو دال على المجال $2 \le x$ ومعادلة $F_X(x) = 1$ أي من الشكل $"y = 1"$ معادلة مستقيم يوازي المحور oy

تتمة الحل وبالتالي نجد : $F(0.2) = \frac{(0.2)^2}{2} = \frac{0.04}{2} = 0.02$ حيث $0 \le 0.02 \le 1$

وأنَّ : $F(1.5) = \frac{1.5}{2} = 0.75$ حيث $0 \le 0.75 \le 1$

$$P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right) = F(1.5) - F(0.5) = \frac{1.5}{2} - \frac{(0.5)^2}{2} = 0.625$$

تمرين (2) ليكن X متغيراً عشوائياً , دالة توزيعه الاحتمالية :

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

عين دالة الكثافة الاحتمالية لـ X وتحقق من ذلك , ثم عين C من أجل : $P(X \leq C) = \frac{1}{2}$

الحل

$$f_X(x) = \left(F_X(x)\right)' = \left(\frac{x}{1+x}\right)' = \frac{(1+x)-(x)}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \; ; x > 0$$

ومنه تكون دالة الكثافة الاحتمالية لـ X هي : $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & ;x>0 \\ 0 & ; x\leq 0 \end{cases}$ وللتحقق لدينا :

$f_X(x) \geq 0$, ولنبرهن الشرط الثاني :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) = \int_{-\infty}^{0} (0).dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}.dx$$

$$= 0 + \left[-\left(\frac{1}{1+x}\right)\right]_0^{+\infty} = (0-(-1)) = 1$$

من أجل C إنَّ :

$$P(X \leq C) = \frac{1}{2} \Rightarrow F_X(C) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{C}{1+C} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2C = 1 + C \Rightarrow C = 1$$

أي أنَّ احتمال : $\frac{1}{2} = x \leq 1$ ومنه : $P(X \leq 1) = \frac{1}{2}$

تمرين (3) ليكن X متغيراً عشوائياً له الكثافة الاحتمالية :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{9} & ; x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

هل $f_X(x)$ كثافة احتمالية فعلية لـ X ؟

الحل

لنتحقق من شروط دالة الاحتمال : $1) \; f_X(x) \geq 0$ الشرط الأول محقق

$$2) \; \sum_x f_X(x) \overset{?}{=} 1$$

$$\sum_x f_X(x) = \sum_{x=0}^{5} \frac{(x-2)^2}{9} = \frac{(-2)^2}{9} = \frac{(-1)^2}{9} + 0 + \frac{(1)^2}{9} + \frac{(2)^2}{9} + \frac{(3)^2}{9} = \frac{19}{9} \neq 1$$

إذاً $f_X(x)$ ليست دالة كثافة لـ X

تمرين (4) ليكن X متغيراً عشوائياً له الكثافة الاحتمالية :

$$f_X(x) = \begin{cases} Kx^2 & ; \ x \in [0,3] \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

1) عين الثابت K حتى تكون $f_X(x)$ دالة كثافة فعلية لـ X .

2) عين دالة التوزيع الاحتمالية لـ X ثم احسب : $P(1 < X < 2)$

الحل

الشرط الأول : $f_X(x) \geq 0$ محقق من أجل $K > 0$

الشرط الثاني : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x).dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,.dx = \int_{-\infty}^{0} (0).dx + \int_{0}^{3} Kx^2.dx + \int_{3}^{+\infty} (0).dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x).dx = 0 + K\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 + 0 = 1 \Rightarrow K\left(\frac{27}{3} - 0\right) = 1$$

$$\Rightarrow K(9) = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{9}$$

فتصبح دالة الكثافة الاحتمالية الفعلية لـ X هي :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9} & ; \ x \in [0,3] \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

2) دالة التوزيع الاحتمالي تعطى بالعلاقة : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t).dt$

ومنه من أجل $t < 0$ فإنَّ : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} (0).dt = 0$

من أجل $0 \leq t \leq 3$ فإنَّ : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} (0).dt + \int_{0}^{x} \frac{t^2}{9}\,.dt = \frac{x^3}{27}$

من أجل $t < 3$ فإنَّ :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} (0).dt + \int_{0}^{3} \frac{t^2}{9}\,.dt + \int_{3}^{x} (0).dt = 0 + \left[\frac{t^3}{27}\right]_0^3 + 0 = (1 - 0) = 1$$

فتصبح دالة التوزيع الاحتمالي لـ X هي :
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{x^3}{27} & ; 0 \leq x \\ 1 & ; 3 \leq x \end{cases}$$

ويكون :
$$P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = \frac{(2)^3}{27} - \frac{(1)^3}{27} = \frac{7}{27}$$

ملاحظة إذا لم يطلب إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي قبلاً فيمكن أن نحسب مباشرة :
$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 f_X(x).dx = \int_1^2 \frac{x^2}{2}.dx = \left[\frac{x^3}{27}\right]_1^2 = \frac{7}{27}$$

تمرين (5)

ليكن X متغيراً عشوائياً دالة توزيعه الاحتمالية :
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$
عين دالة الكثافة الاحتمالية لـ X وتحقق من ذلك , ثم عين $P(X > 10)$.

الحل

$$f_X(x) = \left(F_X(x)\right)' = (1 - e^{-x})' = e^{-x}$$
فتصبح دالة الكثافة الاحتمالية بالشكل :
$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$
وللتحقق نجد أنَّ : $f_X(x) \geq 0$ فالشرط الأول محقق , فنتحقق من الشرط الثاني :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x).dx = \int_{-\infty}^{0}(0).dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}.dx = 0 + [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 0 - 1 = 1$$

ومنه الشرط الثاني أيضاً محقق فنجد أنها دالة كثافة احتمالية فعلية , وإنَّ :
$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - [1 - e^{-10}] = e^{-10}$$
أو :
$$P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} e^{-x}.dx = [-e^{-x}]_{10}^{+\infty} = 0 - (-e^{-10}) = e^{-10}$$

تمرين (6) إذا علمت أنَّ الطلب اليومي لمادة معينة من مخزن يمثل متغيراً عشوائياً له جدول الكثافة :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$x_7 <$
X	0	1	2	3	4	5	6	$6 <$
$f_X(x)$	0.1	0.15	0.2	0.25	0.15	0.1	0.05	0

والمطلوب : 1) برهن أنَّ $f_X(x)$ دالة كثافة احتمالية فعلية لـ X .

2) عين دالة التوزيع الاحتمالي $f_X(x)$.

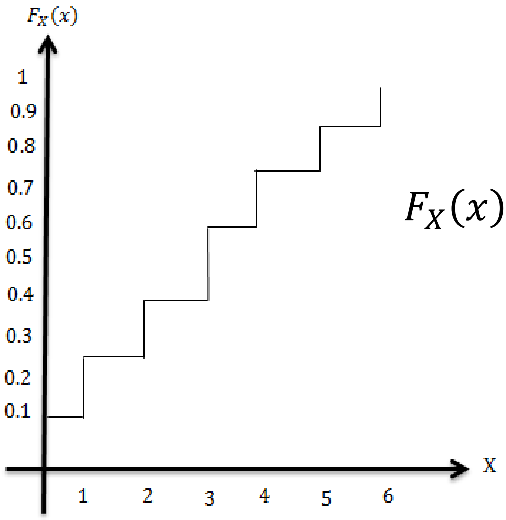
3) احسب $P(X \geq 4)$ و $P(X < 2)$

الحل

نلاحظ أنَّ المتغير العشوائي منقطع للقيم , لدينا $f_X(x) \geq 0$, ولنبرهن الشرط الثاني :

$$\sum_x f_X(x) = (0.1) + (0.15) + (0.2) + (0.25) + (0.15) + (0.1) + (0.05) = 1$$

إذاً $f_X(x)$ دالة احتمالية لـ X .



$$F_X(x) = \sum_{x_i < x} f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ f_X(x) & ; x_1 \leq x < x_2 \\ f_X(x_1) + f_X(x_2) & ; x_2 \leq x < x_3 \\ & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1} f_X(x_i) & ; x_{n-1} \leq x < x_n \\ \sum_{i=1}^{n} f_X(x_i) = 1 & ; x_n \leq x \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x < 0 \\ 0.1 & ; \ 0 \leq x < 1 \\ 0.1 + 0.15 = 0.25 & ; \ 1 \leq x < 2 \\ 0.45 & ; 2 \leq x < 3 \\ 0.70 & ; 3 \leq x < 4 \\ 0.85 & ; 4 \leq x < 5 \\ 0.95 & ; 5 \leq x < 6 \\ 1 & ; 6 \leq x \end{cases}$$

لدينا : $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - [P(X \leq 4) - P(X = 4)]$

$$= 1 - [F(4) - f(4)] = 1 - [0.85 - 0.15] = 1 - 0.70 = 0.30$$

$$P(X < 2) = P(X \leq 2) - P(X = 2) = F(2) - f(2) = 0.45 - 0.2 = 0.25$$

انتهت المحاضرة

إعداد: منى شغل**إيناس دليل** نور مهرة

أيقنو بأنَّ الوصول إلى
الأحلام هو مجرد" دعاء "