نظري

◄ دكتور المادة : حزة الحاكمي

◄ المحاضرة : العشرون ◄ عنوان المحاضرة : P- زمرة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-الزمر التبديلية المنتهية.

٢- P– زمرة.

مبرهنة : لتكن G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها $m.P^n$ حيث P أولي و $n\,,m \in \mathbb{Z}^*$ و $m>0$ لا تقبل القسمة على P عندئذ :

١) $K=\{x : x \in G \ : x^m = e\}$ تشكل زمرة جزئية في G.

٢) $H=\{x : x \in G \ : x^{P^n} = e\}$ تشكل زمرة جزئية في G.

٣) $G = H\times K$

الاثبات :

١) واضح $G \subseteq K \neq \emptyset$ لأن $e \in K$ ، ليكن $x, y \in K$ عندئذ وحسب تعريف الـ K فإن :

$$x^m = e$$

$$y^m = e \quad , \quad y^{-m} = e$$

$$(x.y^{-1})^m = \underbrace{x^m.y^{-1}}_{\text{كون } G \text{ تبديلية فإنه ننزل القوة على المضاريب}} \in H \qquad = e$$

ومنه H زمرة جزئية في G.

٢) بنفس طريقة الـ (1) .

٣) لما كانت الزمرة G تبديلية فإن كلا من K, H زمر جزئية ناظمية في G ومنه فإن $K.H \subseteq G$ زمرة جزئية في G ووجدنا سابقا أنه كي تتحقق $G = H\times K$ يجب أن يتحقق

$G = H.K$ و $K \cap H =< e >$

لنثبت الاحتواء المعاكس

لدينا حسب الفرض $gcd(m,P) = 1$ لأنه طالما العدد الأولي ليس قاسم لـ m فإن القاسم المشترك الأعظم لهما هو 1

ومنه $gcd(m,P^n) = 1$ لأنه إذا $gcd(m,P^n) = d > 1$ فإن d يقسم P^n ومنه $d = P^t$ حيث $n \geq t$

وأيضاً d يقسم m ومنه $s \in Z$: $m = s.d$ وهذا يبين أن m يقبل القسمة على P وهذا مرفوض ومنه

$$gcd(m,P^n) = 1$$

ومنه يوجد $q, r \in Z$ فإن $1 = qm + rP^n$

ليكن $g \epsilon G$ عندئذ :

$$g = g^1 = g^{qm+rP^n} = g^{qm}.g^{rP^n}$$
$$\Longrightarrow (g^{qm})^{P^n} = \left(g^{mP^n}\right)^q = e^q = e$$

ومنه $(g^{qm}) \epsilon H$ وأيضاً $\left(g^{rP^n}\right) \epsilon G$ وأن

$$\left(g^{rP^n}\right)^m = \left(g^{mP^n}\right)^r = e^r = e$$

ومنه $g^{rP^n} \epsilon K$

ومنه $g^{qm}.g^{rP^n} \epsilon H.K$

ومنه نجد أن

$$G \subseteq K.H$$

وبالتالي $G = K.H$ لنثبت أن $H \cap K =< e >$

ليكن $y \epsilon k \cap H$ وأن $o(y) = \lambda$ عندئذ :

$$y \epsilon k \Longrightarrow y^m = e$$

$$y \epsilon H \Longrightarrow y^{P^n} = e$$

ومنه نجد أن λ يقسم كل من m , P^n وطالما $gcd(m, P^n) = 1$ نجد أن $\lambda = 1$

أي أن $y^\lambda = y^1 = e$ ومنه $K \cap H =< e >$ وبالتالي نجد مما سبق أن

$$G = K \times H$$

تمرين : أثبت أن $(H:1) = P^n$.

الحل :

لدينا

$$\boxed{(H.K:1) = \frac{(H:1).(K:1)}{(K \cap H:1)} = (H:1).(K:1) = P^n.m}$$

إن $(K:1)$ لا تقبل القسمة على P لانه اذا كانت $(K:1)$ تقبل القسمة على P فإن $(K:1) = a.P$ حيث $a \in \mathbb{Z}$

ومنه الزمرة K تحوي عنصر مرتبته P لنرمز لهذا العنصر x وبما أن $x \in K$ فإن $x^m = e$ ومنه m يقبل القسمة على P و هذا يناقض الفرض اذاً $(K:1)$ لاتقبل القسمة على P ومنه $(H:1)$ تقبل القسمة على P^n و هذا يثبت أن $(H:1) = P^n$

مبرهنة :بدون برهان كل زمرة تبديلية منتهية G يمكن نشرها على الشكل

$$G = G(P_1) \times \dots\dots\dots\dots \times G(P_n)$$

حيث $G(P_i)$ زمرة جزئية وأن $(G(P_i):1) = {P_i}^{n_i}$

مبرهنة:بدون برهان لتكن G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها P^n حيث P عدد أولي تكتب بالشكل $G =< a >\times K$

حيث $a \in G$ ذو المرتبة الأكبر و K زمرة جزئية في G

مبرهنة :بدون برهان لتكن G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها P^n حيث P عدد أولي عندئذ فإن G تكتب على شكل مجموع مباشر لزمر دوارة مرتبة كل منها قوة لعدد أولي.

الــP – زمر

#تعريف : لتكن G زمرة a, b ϵ G نقول عن a, b إنهما مترافقتان في G إذا وجد x ϵ G بحيث

$$b = x.a.x^{-1}$$

ملاحظة : نرمز لمجموعة العناصر المترافقة مع a بالشكل $cl(a)$.

تمهيدية (بدون برهان) لتكن G زمرة ولنعرف على G علاقة $\mathcal{P}$ بالشكل الاتي :

$$\forall\, a,b \in G \;\; ; \;\; a\,\mathcal{P}\,b \Leftrightarrow \exists\, x\epsilon G \;\; ; \;\; b = x.a.x^{-1}$$

عندئذ :

١) العلاقة $\mathcal{P}$ هي علاقة تكافؤ على G .
٢) إن صفوف تكافؤ العنصر a هي

$$cl(a) = \{xax_1 \;\; : x \in G\}$$
$$a \in cl(a) \quad : \quad a = eae^{-1}$$

تمهيدية : لتكن G زمرة و $a \epsilon G$ عندئذ :

١) المجموعة

$$c(a) = \{x \quad : \quad x \,\epsilon G \;\; : xa = ax\}$$

تشكل زمرة جزئية في G .

٢) لنفرض أن $M_l(c(a))$ مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $c(a)$ في G عندئذ :

$$card\; cl(a) = card\; H_l(c(a))$$

٣) $card\; cl(a) = (G : c(a))$

الاثبات :

١) إن $G \supseteq c(a) \neq \emptyset$ لأن $ea = ae \implies e \in c(a)$

ليكن $x, y \in c(a)$ عندئذ :

$$xa = ax \ , ya = ay$$

$$ay = ya \implies ay^{-1} = y^{-1}a$$

$$(xy^{-1})a = x(y^{-1}a) = x(ay^{-1}) = (xa)y^{-1} = (ax)y^{-1} = a(xy^{-1})$$

ومنه $xy^{-1} \in c(a)$ أي أن $c(a)$ زمرة جزئية في G .

نسمي $c(a)$ **ممركز** العنصر a في G .

٢) لنعرف العلاقة f وفق :

$$f : cl(a) \ \to M_l(c(a))$$

بالشكل : $f(xax^{-1}) = x.c(a) \quad ; \quad \forall xax^{-1} \in cl(a)$

إن f تطبيق و متباين لأنه :

ليكن $xax^{-1} \ , yay^{-1} \ \in cl(a)$

$$xax^{-1} = yay^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xa = yay^{-1}x$$

$$\Leftrightarrow y^{-1}xa = ay^{-1}x \ \Leftrightarrow (y^{-1}x)a = a(y^{-1}x)$$

ومنه $y^{-1}x \in c(a)$ و منه يوجد عنصر $t \in c(a)$ بحيث $y^{-1}x = t$

نضرب الطرفين بالعنصر y نجد :

$$x = y.t \in y.c(a)$$

$$x = y.t \in x.c(a)$$

$$\Leftrightarrow x.c(a) = y.c(a) \Leftrightarrow f(xax^{-1}) = f(yay^{-1})$$

ومنه نجد أن f تطبيق متباين .

إن f غامر لأن :

$$z.c(a) \in M_l(c(a))$$

عندئذ $z \in G$ وإن $zaz^{-1} \in cl(a)$ نأخذ الصورة المباشرة :

$$f(zaz^{-1}) = z.c(a)$$

ومنه f تقابل $\Leftarrow$ $\quad card\ cl(a) = cardM_l\big(c(a)\big)$

٣) $\quad card\ cl(a) = \big(G{:}\,c(a)\big)$

كون $card\ cl(a)$ تساوي عدد المرافقات اليسارية وعدد المرافقات يساوي الدليل $c(a)$ في G إذا (3) نتج من (2) مباشرة .

مبرهنة : لتكن G زمرة منتهية عندئذ : $\quad (G{:}\,1) = \sum_q \big(G{:}\,C(a)\big)$

حيث الدليل للمجموع في الطرف الأيمن مأخوذ على الممثلين لصفوف التكافؤ .

الاثبات :

وجدنا أن صفوف تكافؤ العلاقة ρ هي المجموعة $cl(a)$ حيث $a \in G$

$$\frac{G}{\rho} = \{cl(a)\ \ : a \in G\,\}$$

ومنه $\quad (G{:}\,1)\sum_q card\ cl(a) = \sum\big(G{:}\,c(a)\big)$

تمهيدية : لتكن G زمرة و $a \in G$ فإن الشروط الاتية متكافئة :

١) $\quad a \in Z(G)$
٢) $\quad cl(a) = \{a\}$
٣) $\quad card\ cl(a) = 1$

الاثبات :

$1 \Leftarrow 2$ ليكن $a \in z(G)$ عندئذ :

$$\forall\, x \in G\ \ ;\ \ xa = ax$$

ليكن $x \in cl(a)$ عندئذٍ $\quad = a \quad : y \in G \quad x = y.a.y^{-1}$

وبالتالي $\quad cl(a) = \{a\}$

$(2 \Leftrightarrow 3)$ واضح

$2 \Leftarrow 1$ ليكن $x \in G$ عندئذ $\quad xa\,x^{-1} \in cl(a) = \{a\}$

$$\Longrightarrow xa\,x^{-1} = a \Longrightarrow xa = ax \Longrightarrow a \in Z(G)$$

تعريف : نقول عن الزمرة المنتهية G إنها P – زمرة اذا كان $(G{:}\,1) = P^n$ حيث P عدد أولي .

مثال : 2− زمرة $(G:1)=2^5$

5− زمرة $(G:1)=5^{11}$

مبرهنة : لتكن G زمرة منتهية إذا كانت G هي $P-$ زمرة عندئذ :

$$z(G)\neq <e>$$

الاثبات :

لنفرض أن $(G:1)=P^n$ حيث أن P عدد اولي

ولدينا حسب **علاقة الصفوف** :

$$(G:1)=\sum(G:c(a))=\sum_{a\in Z(G)}(G:c(a))+\sum_{a\notin Z(G)}(G:c(a))$$

$$=(z(G):1)+\sum_{a\notin Z(G)}(G:c(a))$$

وبما أن $(G:c(a))=\frac{(G:1)}{(c(a):1)}$ فإن

ومن جهة أخرى $k\geq 1$ حيث $(G:c(a))=P^k$

$$(z(G):1)=(G:1)-\sum_{a\notin Z(G)}(G:c(a))$$

وأن كل حد من الطرف الأيمن يقبل القسمة على P فإن $(z(G):1)$ يقبل القسمة على P وبما أن $z(G)$ زمرة تبديلية منتهية تقبل القسمة على P فإنها تحوي عنصر مرتبته P وبالتالي تحوي عنصيرين على الأقل احدهما المحايد والأخر العنصر الذي مرتبته P ومنه يتم المطلوب أي :

$$z(G)\neq <e>$$

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا همج