نظرية الاحتمالات

نظري

◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄المحاضرة الرابعة عشر   عنوان المحاضرة : المتجهات العشوائية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- الأشعة العشوائية الثنائية وتوزيعاتها الاحتمالية .

2- الأشعة العشوائية الثنائية المنقطعة (المنفصلة) .

3- تعاريف وتمارين .

الفصل الرابع : المتجهات العشوائية

الأشعة العشوائية الثنائية وتوزيعاتها الاحتمالية

تعريف إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين معرفين على (Ω, F, P) فإننا نسمي الشعاع (X, Y) شعاعاً عشوائياً معرفاً على نفس الفضاء , أي أنه يمكن أن نلحق بكل حدث ابتدائي w من Ω قيمة (x, y) من $\mathbb{R}^2$ لهذا الشعاع

$$(X, Y)w = \big(X(w), Y(w)\big) = (x, y)$$

تعريف نسمي الدالة $F_{X,Y}(x, y)$ المعرفة بالعلاقة :

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \le x\,, Y \le y)$$

دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة للشعاع (المتجه) العشوائي (X, Y)

◄**ملاحظة** إن وقوع الحدث $[X \le \,, Y \le y]$ يعني وقوع الحدثين $[X \le x]$ وَ $[Y \le y]$ معاً بآن واحد أي أنَّ : $P([X \le x\,, Y \le y]) = P([X \le x] \cap [Y \le y])$

خواص دالة التوزيع المشتركة

1) $F_{X,Y}(x, y)$ هي دالة غير متناقصة بالنسبة لكل من x وَ y ومستمرة على من جهة اليمين .

2) $F_{X,Y}(x, -\infty) = 0$ وَ $F_{X,Y}(-\infty, y) = 0$

(3 $F_{X,Y}(+\infty,+\infty)=1$

(4 $F_{X,Y}(+\infty,y)=F_Y(y)$ وَ $F_{X,Y}(x,+\infty)=F_X(x)$

حيث : $F_X(x)$ وَ $F_Y(y)$ دالتا التوزيع الهامشيتين الاحتماليتين لكل من X وَ Y على الترتيب .

(5 $P(x_1<X\le x_2\,,\ y_1<Y\le y_2)=F_{X,Y}(x_2,y_2)-F_{X,Y}(x_2\,,y_1)-F_{X,Y}(x_1,y_2)-F_{X,Y}(x_1,y_1)$

♥ الأشعة العشوائية الثنائية المنقطعة (المنفصلة) ♥

تعريف نقول عن الشعاع العشوائي (X,Y) إنه منقطع (منفصل) إذا كانت مجموعة القيم التي يأخذها هذا الشعاع منتهية أو غير منتهية لكنها قابلة للعد .

فإذا كانت مجموعة قيم المتغير X : $\mathbb{R}_X=\{x_1,x_2,\dots,x_m,\dots\}$

ومجموعة قيم المتغير Y : $\mathbb{R}_Y=\{y_1,y_2,\dots,y_m,\dots\}$

عندئذٍ تكون مجموعة قيم المتغير العشوائي $(,Y)$ هي :

$$\mathbb{R}_{X,Y}=\{\,(x_i\,,y_i)\,;\ i=1,2,\dots,m,\dots\ \ ;\ j=1,2,\dots,n\dots\}$$

ونقول إنَّ الحدث $[(X,Y)=(x_i\,,y_i)]$ إنَّه قد وقع إذا وقع كلا الحدثين $[X=x_i]$ وَ $[Y=y_i]$ معاً في آن واحد , ونرمز لاحتمال وقوع هذا الحدث بِ $P[X=x_i\,,Y=y_j]$.

تعريف دالة الكثافة المشتركة

ندعو الدالة $f_{X,Y}(x,y)$ دالة الاحتمال أو دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة , للشعاع العشوائي (X,Y) .

((أو : دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين X وَ Y)) , حيث :

$$f(x,y)=P[X=x\,,Y=y]$$

ويمكن التعبير عن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة بجدول كما يلي :

X/Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	$\cdots$	المجموع
x_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2)$	$\cdots$	$f(x_1,y_n)$	$\cdots$	$\sum f(x_1,y_j)$
x_2	$f(x_2,y_1)$	$f(x_2,y_2)$	$\cdots$	$f(x_2,y_n)$	$\cdots$	$\sum f(x_2,y_j)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$f(x_m,y_1)$	$f(x_m,y_2)$	$\cdots$	$f(x_m,y_n)$	$\cdots$	$\sum f(x_m,y_j)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
المجموع	$\sum f(x_i,y_1)$	$\sum f(x_i,y_2)$	$\cdots$	$\sum f(x_i,y_n)$	$\cdots$	1

إنَّ دالة الكثافة المشتركة لِـ (X,Y) تحقق الشرطان :

- $0 \le f(x,y) \le 1 \quad ; \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_X \,, y \in \mathbb{R}_Y$
- $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$
- $P\big((x,y) \in A\big) = \sum_{(x,y)\in A} \sum f(x,y)$

مبرهنة إذا كان (X,Y) شعاعاً عشوائياً منقطعاً دالة كثافته الاحتمالية المشتركة $f_{X,Y}(x_i,y_i)$ بحيث :

$$i = 1, \dots , m, \dots \qquad ; \qquad j = 1, \dots , n, \dots$$

وفرضنا أنَّ $f_X(x)$ دالة الكثافة الهامشية لـ X , وأنَّ $f_Y(y)$ دالة الكثافة الهامشية لـ Y فإنَّ :

$$f_Y(y_j) = \sum_{i\ge 1} f(x_i,y_j) \quad , \quad f_X(x_i) = \sum_{j\ge 1} f(x_i,y_j)$$

حيث : $f_Y(y_j) = P(Y = y_j) \quad , \quad f_X(x_i) = P(X = x_i)$

تعريف دالتا الكثافة الهامشيتان لِـ X و Y

إذا كان (X,Y) شعاعاً عشوائياً منقطعاً فإننا ندعو الدالتين $f_X(x)$, $f_Y(y)$ دالتا الكثافة الهامشيتان لِـ X و Y على الترتيب , بحيث : $f_X(x) = \sum_y f(x,y) \quad ; \quad f_Y(y) = \sum_x f(x,y)$

أي أنَّه من أجل $i = 1,2, \dots , m, \dots \quad ; \quad j = 1,2, \dots , n, \dots$ فإنَّ :

$$f_X(x_i) = \sum_{j\ge 1} f(x_i,y_j) \; ; \; f_Y(y_j) = \sum_{i\ge 1} f(x_i,y_j)$$

دالة التوزيع المشتركة لشعاع عشوائي منقطع

$$F_{X,Y}(x,y) = P[X \le x \,, Y \le y] = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} f_{X,Y}(x_i,y_j)$$

مثال بفرض أنَّ $(,Y)$ شعاعاً عشوائياً له جدول التوزيع المشترك :

X/Y	$y_1 = 1$	$y_2 = 2$	$y_3 = 3$	المجموع
$x_1 = 4$	$f(x_1,y_1) = 0.3$	$f(x_1,y_2) = 0.1$	$f(x_1,y_3) = 0.3$	$\sum_{j=1}^{3} f(x_1,y_j) = 0.7$
$x_2 = 6$	0.1	0	0.2	$\sum_{j=1}^{3} f(x_1,y_j) = 0.3$
المجموع	$\sum_{i=1}^{2} f(x_i,y_1) = 0.4 = f_Y(y_1)$	$\sum_{i=1}^{2} f(x_i,y_1) = 0.4 = f_Y(y_1)$	$\sum_{i=1}^{2} f(x_i,y_1) = 0.4 = f_Y(y_1)$	1

$$f_X(x_1) = \sum_{j=1}^{3} f(x_1,y_j) = f(x_1,y_1) + f(x_1,y_2) + f(x_1,y_3)$$

$$f(4,1)+f(4,2)+f(4,3)=0.3+0.1+0.3=0.7$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} f(x_i,y_j)=f(x_1,y_1)+f(x_1,y_2)+f(x_1,y_3)+f(x_2,y_1)+f(x_2,y_2)+f(x_2,y_3)$$
$$=0.3+0.1+0.3+0.1+0+0.2=1$$

إنَّ دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي X موضحة بالجدول التالي :

X	4	6	المجموع
$f_X(x)$	$\sum_{j=1}^{3} f(x_2,y_j)=0.7$	$\sum_{j=1}^{3} f(x_2,y_j)=0.3$	1

وإنَّ دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي Y موضح ة بالجدول التالي :

Y	1	2	3	المجموع
$f_Y(y)$	$\sum_{j=1}^{2} f(x_i,y_1)=0.4$	$\sum_{j=1}^{2} f(x_i,y_2)=0.1$	$\sum_{i=1}^{2} f(x_i,y_3)=0.5$	1

$$F(5,2.5)=P[X\le 5\,,Y\le 2.5]=\sum_{x_i\le 5}\sum_{y_j\le 2.5} f(x_i,y_j)=f(4,1)+f(4,2)=0.3+0.1=0.4$$

$$F(7,2.5)=P[X\le 7\,,Y\le 2.5]=\sum_{x_i\le 7}\sum_{y_j\le 2.5} f(x_i,y_j)=f(4,1)+f(4,2)+f(6,1)+f(6,2)$$
$$=0.3+0.1+0.1+0=0.5$$

$$F(2,5)=\overbrace{\sum_{x_i\le 2}}^{\text{مستحيل}}\sum_{y_j\le 5} f(x_i,y_j)=P[X\le 2\,,Y\le 5]=P(\emptyset)=0$$

$$F(7,4)=\underbrace{\sum_{X\le 7}\sum_{Y\le 4} f(x_i,y_j)}_{\text{جميع القيم}}=P[X\le 7\,,Y\le 4]=P(\Omega)=1$$

تمرين ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً له الكثافة الاحتمالية المشتركة التالية :

$$f(x,y)=\frac{x+y}{21}\;;\;x=1,2,3\;,\;y=1,2$$

عين الكثافات الهامشية لكل من X وَ Y .

الحل

$$f_X(x)=\sum_y f(x,y)=\sum_{y=1}^{y=2}\left[\frac{x+y}{21}\right]=\frac{x+1}{21}+\frac{x+2}{21}=\frac{2x+3}{21}\quad ;x=1,2,3$$

إنَّ دالة الكثافة الهامشية للمتغير X نلاحظ أنَّها لا تتعلق بـ y نهائياً .

للتأكد نلاحظ أنَّ :

$$\sum_x f_X(x)=\sum_{x=1}^{3}\left(\frac{2x+3}{21}\right)=\frac{5}{21}+\frac{7}{21}+\frac{9}{21}=\frac{21}{21}=1$$

إذاً $f_X(\ \ )=\frac{2x+3}{21}$ هي دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير X .

$$f_Y(y)=\sum_x f(x,y)=\sum_{x=1}^{3}\left(\frac{x+y}{21}\right)=\frac{y+1}{21}+\frac{y+2}{21}+\frac{y+3}{21}=\frac{3y+6}{21}=\frac{2+y}{7}\quad ;y=1,2$$

إنَّ دالة الكثافة الهامشية للمتغير Y نلاحظ أنَّها لا تتعلق بـ x نهائياً .

للتأكد نلاحظ أنَّ :

$$\sum_y f_Y(y)=\sum_{y=1}^{2}\left(\frac{2+y}{7}\right)=\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=\frac{7}{7}=1$$

إذاً $f_Y\ (y)=\frac{2+y}{7}$ هي دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير Y .

انتهت المحاضرة

مهما حاولت فلن يكون من
نصيبك إلا ما كتبه الله لك ...♥

إعداد: منى شغل**إيناس دليل**نور مهرة