◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: الثامنة عشرة

عنوان المحاضرة: شروط التدحرج دون انزلاق

سنبدأ معكم أصدقائي في هذه المحاضرة بفقرة جديدة بعنوان شروط التدحرج دون انزلاق ..

## شروط التدحرج دون انزلاق في الحركة المستوية

إن حركة المركز الآني للدوران على المتدحرج بالنسبة للمستوي المتحرك هي حركة نسبية وسرعة انتقالها ( المركز الآني ) على المتدحرج هي سرعة نسبية يرمز لها بـ $\left(\overrightarrow{V_r}(I)\right)$ .

إن حركة نقطة ما مثل $(P)$ من المستوي المتحرك والتي تنطبق على $(I)$ في لحظة ما بالنسبة للمستوي الثابت هي حركة جرية والسرعة في هذه الحركة تكون مساوية للصفر أي $(\overrightarrow{V_e}(I) = \vec{0})$ حسب تعريف المركز الآني للدوران ، كما أن حركة النقطة $(I)$ بالنسبة للجملة الثابتة ( القاعدة ) هي حركة مطلقة وسرعتها $\left(\overrightarrow{V_a}(I)\right)$ ، وحسب تركيب الحركات فإن :

$$\overrightarrow{V_a}(I) = \overrightarrow{V_r}(I) + \overrightarrow{V_e}(I)$$

وبما أن $\overrightarrow{V_e}(I) = \vec{0}$ فإن :

$$\overrightarrow{V_a}(I) = \overrightarrow{V_r}(I)$$

**نستنتج** أن سرعة انتقال $(I)$ على القاعدة ( السرعة المطلقة ) تساوي سرعة انتقال $(I)$ على المتدحرج ( السرعة النسبية ) وبالتالي المسافة التي تقطعها $I$ (( المركز الآني للدوران ))على القاعدة تساوي المسافة التي تقطعها على المتدحرج .

**الخلاصة**

إن العبارات التالية متكافئة ويعد كل منها هو شرط للمتدحرج دون انزلاق لمنحني ما $(c)$ على منحني ثابت $(c_1)$ :

**أولا :** نقطة التماس بين المنحنيين $c_1 , c$ هي المركز الآني للدوران .

**ثانيا :** السرعة الجرية لنقطة التماس تساوي الصفر "معدومة "

**ثالثا :** السرعة المطلقة للمركز الآني للدوران يساوي السرعة النسبية للمركز الآني للدوران .

**رابعا :** المسافة التي تقطعها نقطة التماس على المنحني $(c)$ تساوي المسافة التي تقطعها نقطة التماس على المنحني $(c_1)$ في فترة زمنية واحدة ( أي المسافة على القاعدة تساوي المسافة على المتدحرج )

## مسألة

ليكن $(o_1x_1y_1)$ جملة إحداثيات ثابتة قائمة ومباشرة , $(xoy)$ زاوية قياسها $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ تدور في المستوي الثابت $(o_1x_1y_1)$ حول رأسها $(o)$ بسرعة زاويّة $(\omega = 2t)$ ويتحرك رأسها $(o)$ على المستقيم $(o_1x_1)$ بسرعة قيمتها العددية $(V)$ , $(M)$ نقطة تتحرك بالنسبة للزاوية $(xoy)$ إحداثياتها $M(x,y)$

**والمطلوب :**

**1-** عين معادلات الحركة .

**2-** عين مركبات متجه السرعة المطلقة ومتجه التسارع المطلق للنقطة $(M)$ بدلالة الزمن وبدلالة إحداثيات النقطة $(x,y)$ والمشتقات $y' = \frac{dy}{dt}$ , $x' = \frac{dx}{dt}$ .

**3-** أوجد القاعدة والمتدحرج ومركز التسارع المعدوم .

## الحل :

**1-** إيجاد معادلات الحركة .

الحركة هنا هي حركة مستوية (( لأنه لدينا محورين فقط )) ، نختار جملة محاور متماسكة مع الزاوية $xoy$ ، ولتكن $OXY$ بحيث ينطبق منحى $OX$ مع $ox$ ، وتكون في الحركة المستوية معادلات الحركة هي $(x_0, y_0)$ والزاوية $\theta$ وهي الزاوية بين مستقيم متماسك مع الزاوية ( وليكن $ox$ ) ومستقيم ثابت في الجملة الثابتة ( وليكن $o_1x_1$ ) أي أن الزاوية $\theta$ هي :

$$\theta(ox, o_1x_1) \Longrightarrow \theta(oX, o_1x_1)$$

وبما أن الحركة مستوية فلدينا احداثيات القطب ، وبما أنه لدينا سرعة النقطة $o$ وبالتالي نختارها قطباً للحركة وبالتالي :

$$x_0 = \int v\,dt = vt + c$$

في بداية الحركة $x_0 = 0 \ , t = 0 \ \Longrightarrow c = 0$

$$\Longrightarrow x_0 = vt \quad \dots(1)$$

$$y_0 = 0 \quad \dots(2)$$

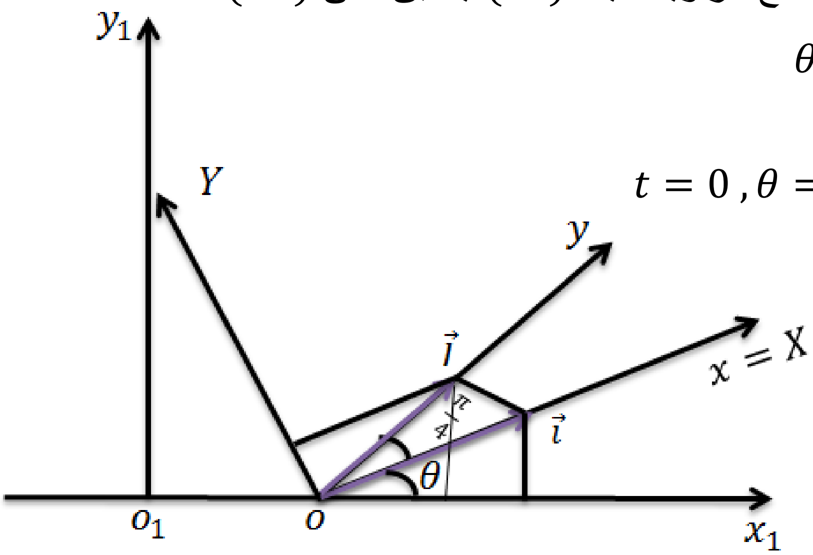
ولدينا $(oXY)$ جملة محاور متماسكة مع الزاوية حيث $(ox)$ ينطبق على $(oX)$

$$\theta' = \omega = 2t \ \Longrightarrow \theta = \int 2t\,dt$$

$$\Longrightarrow \theta = t^2 + \theta_0$$

في بداية الحركة $t = 0 \, , \theta = 0 \ \Longrightarrow \ \theta_0 = 0$

$$\Longrightarrow \theta = t^2 \quad \dots(3)$$



**2- مركبات متجه السرعة والتسارع المطلقة**

لدينا أولاً حركة $M$ بالنسبة للزاوية هي حركة نسبية ، أما حركة $M$ مع الزاوية بالمستوي المتماسك هي حركة جرّية لإيجاد السرعة المطلقة لدينا طريقتين ، إما عن طريق الاشتقاق المباشر أو عن طريق التركيب الحركات حيث لدينا (( $\overrightarrow{V_a}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{V_r}(\mathrm{M}) + \overrightarrow{V_e}(\mathrm{M})$ )) أي نوجد السرعة النسبية والسرعة الجرية ونجمع السرعتين .

**الطريقة الأولى :** عن طريق الجملة الثابتة والاشتقاق .

لدينا شعاع الموضع بالجملة الثابتة يعطى بالعلاقة :

$$\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1o} + \overrightarrow{oM}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{o_1M} = v.t\overrightarrow{\imath_1} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

نقوم بتحويل كل من $\vec{\imath},\vec{\jmath}$ إلى الجملة الثابتة عن طريق الاسقاط فنجد :

$$\vec{\imath} = \cos\theta\,\overrightarrow{\imath_1} + \sin\theta\,\overrightarrow{\jmath_1}$$

$$\vec{\jmath} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{\imath_1} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{\jmath_1}$$

بالتعويض بعبارة شعاع الموضع نجد :

$$\overrightarrow{o_1M} = vt\overrightarrow{\imath_1} + x(\cos\theta\,\overrightarrow{\imath_1} + \sin\theta\,\overrightarrow{\jmath_1}) + y\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{\imath_1} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{\jmath_1}\right)$$

ومنه بالإصلاح نجد :

$$\overrightarrow{o_1M} = \left(v.t + x.\cos t^2 + y.\cos\left(t^2 + \frac{\pi}{4}\right)\right)\overrightarrow{\imath_1} + \left(x.\sin t^2 + y.\sin\left(t^2 + \frac{\pi}{4}\right)\right)\overrightarrow{\jmath_1}$$

وبالإسقاط نجد :

$$x_1 = vt + x.\cos t^2 + y.\cos\left(t^2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y_1 = x.\sin t^2 + y.\sin\left(t^2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

وبالاشتقاق المباشر نجد السرعة للنقطة المادية $M$

$$x_1' = v + x'.\cos t^2 - 2tx.\sin t^2 + y'.\cos\left(t^2 + \frac{\pi}{4}\right) - 2ty.\sin\left(t^2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y_1' = x'.\sin t^2 + 2tx.\cos t^2 + y'.\sin\left(t^2 + \frac{\pi}{4}\right) + 2ty.\cos\left(t^2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

ومنه مركبات السرعة المطلقة: $\overrightarrow{V_a}(\mathrm{M}) = (x_1', y_1')$

وباشتقاق مركبات السرعة نحصل على التسارع ، وبالتالي مركبات التسارع المطلق تكون :

$$\overrightarrow{\Gamma_a}(M) = (x_1'', y_1'')$$

**الطريقة الثانية :** حسب مبدأ تركيب الحركات

احداثيات النقطة $M$ في الجملة غير المتعامدة $xoy$ هي $(x,y)$ عندئذٍ :

$$\overrightarrow{oM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

حيث $\vec{\imath},\vec{\jmath}$ هي أشعة الواحدة في الجملة غير المتعامدة ، وبفرض $\vec{I},\vec{J}$ هي أشعة الواحدة في الجملة المتعامدة المتماسكة مع الجسم (( الزاوية )) ،
نقوم بإسقاط $\vec{\imath},\vec{\jmath}$ على الجملة المتعامدة المتماسكة فنجد أن :

$$\vec{\imath}=\vec{I} \quad , \quad \vec{\jmath}=\cos\frac{\pi}{4}\vec{I}+\sin\frac{\pi}{4}\vec{J}$$

وبالتعويض بعبارة شعاع الموضع :

$$\overrightarrow{oM}=x\vec{I}+y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{I}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{J}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{oM}=\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)\vec{I}+\frac{\sqrt{2}}{2}y\vec{J}$$

بالتالي هي مركبات النقطة $M$ على الجملة المتماسكة $oxy$ أي أن $M\left(x+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$

بالاشتقاق نحصل على السرعة النسبية أي :

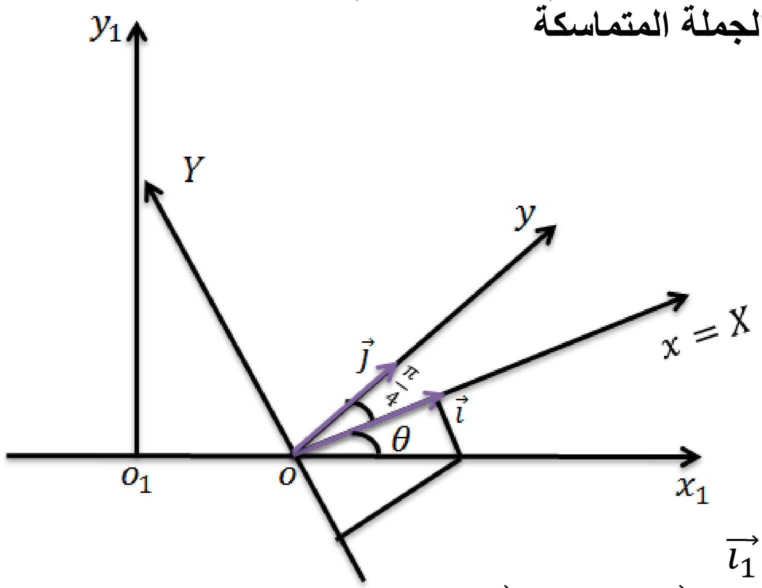
$$\vec{V_r}(M)=\left.\frac{d\overrightarrow{oM}}{dt}\right|_M=\left(x'+\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\vec{I}+\frac{y'}{\sqrt{2}}\vec{J}$$

كما أن الحركة الجرّية هي حركة مستوية فإن :

$$\vec{V_e}=\vec{V}(o)+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oM}$$

$$\Rightarrow \vec{V_e}(M)=v\vec{\imath_1}+\begin{vmatrix}\vec{I} & \vec{J} & \vec{K}\\ 0 & 0 & 2t\\ x+\frac{y}{\sqrt{2}} & \frac{y}{\sqrt{2}} & 0\end{vmatrix}$$

**حيث أن** $\vec{\omega}(0,0,2t)$ هو شعاع الدوران عمودي على المستوي الحركة لذلك اخذنا مركبته على $\vec{K}$
**ولكن بالإسقاط لتحويل** $\vec{\imath_1}$ **إلى الجملة المتماسكة**




**نجد :** $\vec{\imath_1}=\cos\theta\,\vec{I}-\sin\theta\,\vec{J}$

$$\Rightarrow \vec{\imath_1}=\cos t^2\,\vec{I}-\sin t^2\,\vec{J}$$

$$\Rightarrow \vec{V_e}(M)=v\left(\cos t^2\,\vec{I}-\sin t^2\,\vec{J}\right)+\left(-\sqrt{2}.t.y\vec{I}+\left(2tx+\sqrt{2}t.y\right)\vec{J}\right)$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{V_e}(M) = \left(v.\cos t^2 - \sqrt{2}.t.y\right)\vec{I} + \left(-v.\sin t^2 + 2t.x + \sqrt{2}t.y\right)\vec{J}$$

وبالتالي فإن السرعة المطلقة هي :

$$\overrightarrow{V_a}(M) = \overrightarrow{V_r}(M) + \overrightarrow{V_e}(M)$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{V_a}(M) = \left(x' + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\vec{I} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\vec{J} + \left(v.\cos t^2 - \sqrt{2}.t.y\right)\vec{I} + \left(-v.\sin t^2 + 2t.x + \sqrt{2}t.y\right)\vec{J}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{V_a}(M) = \left(x' + \frac{y'}{\sqrt{2}} + v.\cos t^2 - \sqrt{2}t.y\right)\vec{I} + \left(\frac{y'}{\sqrt{2}} - v.\sin t^2 + 2tx + \sqrt{2}t.y\right)\vec{J}$$

ومنه مركبات السرعة المطلقة هي :

$$V_{ax}(M) = x' + \frac{y'}{\sqrt{2}} + v.\cos t^2 - \sqrt{2}t.y$$

$$V_{ay}(M) = \frac{y'}{\sqrt{2}} - v.\sin t^2 + 2tx + \sqrt{2}t.y$$

نحصل على التسارع المطلق من العلاقة :

$$\overrightarrow{\Gamma_a}(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}\right|_M + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_a}$$

$$\Longrightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}\right|_M = \left(x'' + \frac{y''}{\sqrt{2}} - 2t.v.\sin t^2 - \sqrt{2}y - \sqrt{2}ty'\right)\vec{I}$$

$$+ \left(\frac{y''}{\sqrt{2}} - 2tv.\cos t^2 + 2x + 2tx' + \sqrt{2}y + \sqrt{2}ty'\right)\vec{J}$$

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_a} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & 2t \\ V_{ax} & V_{ay} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_a} = -2t.V_{ay}\vec{I} + 2t.V_{ax}\vec{J}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\Gamma_a}(M) = \left(x'' + \frac{y''}{\sqrt{2}} - 2t.v.\sin t^2 - \sqrt{2}y - \sqrt{2}ty' - 2t.V_{ay}\right)\vec{I}$$

$$+ \left(\frac{y''}{\sqrt{2}} - 2tv.\cos t^2 + 2x + 2tx' + \sqrt{2}y + \sqrt{2}ty' + 2t.V_{ax}\right)\vec{J}$$

ومنه مركبات التسارع المطلقة في الجملة المتماسكة هي :

$$\Gamma_{ax} = x'' + \frac{y''}{\sqrt{2}} - 2t.v.\sin t^2 - \sqrt{2}y - \sqrt{2}ty' - 2t.V_{ay}$$

$$\Gamma_{ay} = \frac{y''}{\sqrt{2}} - 2tv.\cos t^2 + 2x + 2tx' + \sqrt{2}y + \sqrt{2}ty' + 2t.V_{ax}$$

**3- ايجاد القاعدة والمتدحرج و مركز التسارع المعدوم**

لدينا $(v.t, 0) = 0$ هو قطب للحركة ، وليكن $I(x_0, y_0)$ هو المركز الآني للدوران في جملة ثابتة :

لدينا : $\vec{V}(o) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{Io} \dots (1)$

حيث $\vec{V}(o) = v\vec{\imath_1}$ و $\overrightarrow{Io} = (v.t - x_0, 0 - y_0) = (v.t - x_0, -y_0)$

نعوض في العلاقة $(1)$ فنجد :

$$v\vec{\imath_1} = \begin{vmatrix} \vec{\imath_1} & \vec{J_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & 2t \\ v.t - x_0 & -y_0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow v\vec{\imath_1} = (2t.y_0)\vec{\imath_1} + (2v.t^2 - 2t.x_0)\vec{J_1}$$

بالمطابقة نجد :

$$v = 2t.y_0 \dots\dots (1) \quad , \qquad 0 = 2t(v.t - x_0) \dots\dots (2)$$

من $(2)$ نجد : $0 = v.t - x_0 \Rightarrow x_0 = v.t \Rightarrow t = \frac{x_0}{v}$

ومن $(1)$ نجد : $y_0 = \frac{v}{2t} \dots\dots (*)$

نعوض قيمة $t$ في المعادلة $(*)$ فنجد :

$$y_0 = \frac{v}{2\frac{x_0}{v}} \Rightarrow y_0 = \frac{v^2}{2x_0} \Rightarrow y_0.x_0 = \frac{v^2}{2}$$

ومنه **القاعدة** هي معادلة قطع زائد متساوي الساقين .

**إيجاد المتدحرج**

لدينا $(o)$ هو قطب للحركة ، وليكن $I(x_0, y_0)$ هو المركز الآني للدوران في جملة المتماسكة :

لدينا : $\vec{V}(o) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{Io} \dots (\$)$

ولدينا أيضاً $\vec{V}(o) = v\vec{\imath_1}$ على الجملة الثابتة ، فنسقطها على الجملة المتماسكة $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ فنجد :

$$\vec{\imath_1} = \cos\theta\,\vec{I} - \sin\theta\,\vec{J} \Rightarrow \vec{V}(o) = v.\vec{\imath_1} \Rightarrow v.\cos t^2\,\vec{I} - v.\sin t^2\,\vec{J}$$

ولدينا $\overrightarrow{Io} = (0 - x_0, 0 - y_0) = (-x_0, -y_0)$ بالتعويض في $(\$)$ نجد :

$$v.\cos t^2\,\vec{I} - v.\sin t^2\,\vec{J} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & 2t \\ -x_0 & -y_0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$v.\cos t^2\,\vec{I} - v.\sin t^2\,\vec{J} = 2t.y_0\vec{I} - 2t.x_0\vec{J}$$

بالمطابقة نجد :

$$v.\cos t^2 = 2t.y_0 \dots (1) \quad , \qquad -v.\sin t^2 = -2t.x_0 \dots\dots (2)$$

من العلاقة $(1)$ نجد : $y_0 = v.\frac{\cos t^2}{2t}$ ومن العلاقة $(2)$ نجد : $x_0 = v.\frac{\sin t^2}{2t}$

نلاحظ أنه لا يمكننا أن نحذف الزمن لذلك نقول عن العلاقة $(1)$ و $(2)$ بالمعادلات الوسيطية **للمتدحرج** .

إن مركز التسارع المعدوم هو القطب $o$

حسب التعريف : أي نقطة من المتحرك ينعدم تسارعها بالنسبة للجملة الثابتة تدعى **مركز التسارع المعدوم**.

انتهت المحاضرة