المحاضرة الرابعة

الأربعاء ١ محرم ١٤٣٩هـ

١١ تشرين(١١) ٢٠١٧م

خطوات حل تمهيدية الأفعى

$$\begin{tikzcd}
 & \overset{2}{m} \arrow[r, "\beta\ \text{غامر}"'] \arrow[d] & \overset{1}{m''} \in \ker \varphi'' \arrow[d] \\
\overset{5}{n'} \arrow[r] \arrow[d] & \overset{4}{\varphi(m)} \arrow[r] & \overset{3}{0} \\
\overset{6}{\overline{n'}} \in \ker \varphi' & &
\end{tikzcd}$$

اثبات وجود التطبيق δ

$\exists\, m'' \in \ker \varphi''$

$\exists\, m \in M$ $\boxed{m'' = \beta(m)}$ I

$0 = \varphi''(m'') = \varphi''(\beta(m))$

$= \beta_1(\varphi(m))$ بما ان المخطط تبديلي

$\Rightarrow \varphi(m) \in \ker \varphi$

$\Rightarrow \varphi(m) \in \operatorname{Im} \alpha_1$

$\exists\, n' \in N'$; $\boxed{\alpha_1(n') = \varphi(m)}$ II

$\Rightarrow \overline{n'} \in \operatorname{Coker} \varphi'$

عندئذ يمكن ان يعرف التطبيق

$\delta : \ker \varphi'' \longrightarrow \operatorname{Coker} \varphi'$

$m'' \longrightarrow \varphi''(m'') = \overline{n'}$

/ /

اثبات ان δ تعيين "$\hat{m}$" لا يتعلق باختيار "m"

$m'' \in M''$ $\quad \exists\, m, \hat{m} \in M$

$m'' = \beta(m) = \beta(\hat{m})$ بحيث

$\beta(m) - \beta(\hat{m}) = \beta(m - \hat{m}) = 0$

β شامل

$m - \hat{m} \in \ker\beta = \operatorname{Im}\alpha$

$\exists\, m' \in M'$; $\alpha(m') = m - \hat{m}$

$\varphi(\alpha(m')) = \varphi(m - \hat{m})$

$\alpha_1(\varphi'(m')) = \varphi(m) - \varphi(\hat{m})$ علما ان المخطط تبادلي

حسب II

$\alpha_1(\varphi'(m')) = \alpha_1(n') - \alpha_1(\hat{n}')$ $\quad n', \hat{n}' \in N'$

$\Rightarrow \varphi'(m') = n' - \hat{n}' \in \operatorname{Im}\varphi'$

$\Rightarrow \overline{n' - \hat{n}'} \in \operatorname{coker}\varphi'$

$\Rightarrow \overline{n' - \hat{n}'} = 0$

$\overline{n'} = \overline{\hat{n}'}$

$\Rightarrow m = \hat{m}$

اثبات ان δ هو R-linear

$\forall\, m'' \in \ker\varphi''$ $\quad \boxed{\delta(m'') = \overline{n'}}$ III

$= n' + \operatorname{Im}\varphi'$

$\forall\, m_1'', m_2'' \in \ker\varphi''$ $\quad \exists\, n_1', n_2' \in N'$

$\delta(m_1'' + m_2'') = \overline{n_1' + n_2'}$

$= \overline{n_1'} + \overline{n_2'}$

$= \delta(m_1'') + \delta(m_2'')$

$\delta(\lambda m'') = \overline{\lambda n'}$

$= \lambda \overline{n'}$

$= \lambda \delta(m'')$

اثبات ان $\operatorname{Im}\alpha = \ker \overline{\alpha}_1$ (حتى تكون المتتالية تامة)

$\forall\, m'' \in \ker \varphi'' \quad \exists\, m \in M$

حسب I , II $\quad m'' = \beta(m)$

$n' \in N' \quad \alpha_1(n') = \varphi(m)$

$\delta(m'') \in \operatorname{Coker}\varphi'$

من III $\quad \overline{\alpha}_1(\delta(m'')) = \overline{\alpha}_1(\overline{n'})$

$= \overline{\alpha_1(n')}$

$= \overline{\varphi(m)} = 0$

$\Rightarrow \delta(m'') \in \ker \overline{\alpha}_1$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\delta \subseteq \ker \overline{\alpha}_1$

* لنثبت الاحتواء الآخر .

$\forall\, \overline{n'} \in \ker \overline{\alpha}_1 \qquad \overline{\alpha}_1(\overline{n'}) = 0$

$\alpha_1(n') \in \operatorname{Im}\varphi$

$\exists\, m \in M \qquad \varphi(m) = \alpha_1(n')$

$\beta_1(\varphi(m)) = \beta_1(\alpha_1(n')) = 0$

وذلك لان المتتالية تامة

وبما ان المخطط تبادلي $\quad \beta_1(\varphi(m)) = \varphi''(\beta(m)) = 0$

$\Rightarrow \beta(m) \in \ker \varphi''$

ومنه حسب I إن $\quad m'' = \beta(m)$

$\delta(\beta(m)) = \delta(m'') = \bar{n}' \in \operatorname{Im}\delta$

$\Rightarrow \ker \bar{\alpha}_1 \supseteq \operatorname{Im}\delta$

$\Rightarrow \ker \bar{\alpha}_1 = \operatorname{Im}\delta \Rightarrow$ تم المطلوب.

special snak's lemma مبرهنة 9

اذا كان المخطط التالي تبديلي واسطره متتاليات تامة.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

اذا كان اثنان من φ'' , φ , φ' تماثل فإن الثالث تماثل

نفرض ان φ', φ'' تماثل عندئذ حسب تعميم Snak's lemma تكون المتتالية

$$0 \to \ker\varphi' \to \ker\varphi \to \ker\varphi'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\varphi' \to \operatorname{Coker}\varphi \to \operatorname{Coker}\varphi'' \to 0$$

تامة وبما ان φ' , φ'' تماثل فإن

$$0 \to 0 \to \ker\varphi \to 0 \to 0 \to \operatorname{Coker}\varphi \to 0 \to 0$$

$\Rightarrow \ker\varphi = 0 \Rightarrow \varphi$ متباين

$\operatorname{Coker}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi$ غامر

$\Rightarrow \varphi$ تماثل

وبالتالي تم المطلوب

/ /

١. نتيجة (9. lemma)

ليكن المخطط التالي تبديلي من R-linear's حيث كل عمود من الأعمدة فيه يمثل متتالية تامة.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "G"] & M \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "G"] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "G"] & N \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "G"] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

وليكن السطر الاوسط متتالية تامة عندئذ اذا كان السطر الأول (الثالث) متتالية تامة فإن السطر الثالث (الاول) متتالية تامة.

لنفرض ان السطر الاول $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ متتالية تامة عندئذ حسب Snak's Lemma فإن المتتالية $0 \to 0 \to 0 \xrightarrow{\delta} 0 \to P' \to P \to P'' \to 0$ تامة.

النتيجة: اذا كانت $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varphi} M'' \to 0$ متتالية قصيرة تامة من R-linear فإن القضايا التالية متكافئة.

I) المتتالية منشطرة. $\exists \psi : M'' \to M$

$\psi \circ \varphi = id_M$

II) $\exists j : M \to M'$ حيث j هي R-linear بحيث

$j \circ i = id_{M'}$

انتهت المحاضرة الرابعة

المحبة وسط السجية حياة والضعف جميل لولا الله

الاثنين ٢٦ محرم ١٤٣٩هـ
١٦ تشرين (٢) ٢٠١٧م

المحاضرة الخامسة

$\boxed{\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II}}$

لنعرض المخطط التالي

الاحتواء القانوني

متتالية تامة

الإسقاط القانوني

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "id_{M'}"] & M' \oplus M'' \arrow[r] \arrow[d, "i \oplus \varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "id_{M''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$i \oplus \varphi : M' \oplus M'' \longrightarrow M .$$
$$(m', m'') \longmapsto i \oplus \varphi (m', m'') = i(m') + \varphi(m'')$$

حسب special snak's Lemma

إن $i \oplus \varphi$ تماثل.

ie : $j := Pr_{M'} \circ (i \oplus \varphi)^{-1} : M \xrightarrow{(i \oplus \varphi)^{-1}} M' \oplus M'' \xrightarrow{Pr} M'$

$$\Longrightarrow \quad j \circ i = id_{M'}$$

$\boxed{\mathrm{I} \Leftarrow \mathrm{II}}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "id_{M'}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "j \oplus \varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "id_{M''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M' \oplus M'' \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

حسب special snak's Lemma

إن $j \oplus \varphi$ تماثل

$\exists\, \psi = (j \oplus \varphi)^{-1}\Big|_{M''} \quad ; M'' \subseteq M'' \oplus M' \longrightarrow M$

$$\psi \circ \varphi = id_M$$

Localization التموضع الفصل الثاني :

لتكن $\phi \neq S \subseteq R$ ، نقول ان S مغلقة ضربياً اذا

$1 \in S \qquad s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 . s_2 \in S$

* اذا كانت S مغلقة ضربياً في R عندئذ

يمكن ان نعرف علاقة التكافؤ $\sim$ على $R \times S$

بالشكل

$(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) \Longleftrightarrow \exists\, u \in S \qquad u(r_1 s_2 - s_1 r_2) = 0$

ان علاقة التكافؤ هي علاقة انعكاسية

$(r, s) \in R \times S \qquad \exists\, 1 \in S \qquad 1.(rs - sr) = 0$

$$\Rightarrow (r, s) \sim (r, s)$$

علاقة تناظرية

$(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in R \times S \qquad \exists\, u \in S \qquad (r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$

$$u(r_1 s_2 - s_1 r_2) = 0$$

$\times(-1) \qquad u(s_1 r_2 - r_1 s_2) = 0$

$$\Rightarrow (r_2, s_2) \sim (r_1, s_1)$$

علاقة متعدية

$(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) \Rightarrow \exists\, u \in S \qquad u(r_1 s_2 - s_1 r_2) = 0$

$(r_2, s_2) \sim (r_3, s_3) \Rightarrow \exists\, v \in S \qquad v(r_2 s_3 - s_2 r_3) = 0$

$$s_3 v u (r_1 s_2 - s_1 r_2) + s_1 u v (r_2 s_3 - s_2 r_3) = 0$$

/ /

$$\Rightarrow s_3 u v r_1 s_2 - s_1 u v s_2 r_3 = 0$$

$$u v s_2 (s_3 r_1 - r_3 s_1) = 0$$

$$\exists t \in S \ ; \ t = u v s_2$$

$$\Rightarrow t(r_1 s_3 - s_1 r_3) = 0$$

$$\Rightarrow (r_1, s_1) \sim (r_3, s_3)$$

وظيفة: بين ان Q حلقة كسور لـ Z .

يمكننا ان نعرف صفوف التكافؤ بالشكل

$$\frac{r}{s} = [(r,s)] = \{ (r', s') \in R \times S \quad (r,s) \sim (r',s') \}$$

ونرمز لمجموعة كل الصفوف $S^{-1}R$

ونعرف على هذه المجموعة قانوني تشكيل داخليين

$$+ : S^{-1}R \times S^{-1}R \longrightarrow S^{-1}R$$

$$\left(\frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2}\right) \longrightarrow \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2}.$$

$$\cdot : S^{-1}R \times S^{-1}R \longrightarrow S^{-1}R$$

$$\left(\frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2}\right) \longrightarrow \frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2}$$

عندئذ تكون البنية الجبرية $(S^{-1}R, +, \cdot)$ حلقة تبديلية واحدية

واحدها $1 = \frac{1}{1}$

natural ring extension تطبيق التمديد الطبيعي

$$\pi : R \longrightarrow S^{-1}R$$

/ /

$\forall r \in R \quad \pi(r) = \frac{r}{1}$

أسئلة: * بين فيما اذا كان π متباين

* اذا كانت R خالية من قواسم الصفر فإن π متباين

تمدد المثالي I في $S^{-1}R$

$\langle \pi(I) \rangle = I^e = S^{-1}I \qquad I \trianglelefteq R$

س. حدرة مبرهنة (١٢) اذا كان $I \trianglelefteq R$ و $I \cap S \neq \phi \Leftrightarrow$

$S^{-1}R = S^{-1}I$

$\boxed{\Leftarrow}$ لنفرض ان $I \cap S \neq \phi$

$\exists\, i \in I \cap S \Rightarrow i \in I \qquad i \in S$

$\pi(i) = \frac{i}{1} \in S^{-1}I$

قابل للقلب في $S^{-1}R$

$\Rightarrow \exists\, \frac{1}{i} \in S^{-1}R \qquad \frac{i}{1} \cdot \frac{1}{i} = 1$

$\Rightarrow S^{-1}I = S^{-1}R$

$\boxed{\Rightarrow} \quad 1 = \frac{1}{1} \in S^{-1}R = S^{-1}I$

$\exists\, i \in I \qquad s \in S$

$\frac{1}{1} = \frac{i}{s} \Rightarrow \exists\, u \in S \;;\; u(i-s) = 0$

$\underbrace{ui}_{\in I} = \underbrace{us}_{\in S} \in I \cap S$

$\Rightarrow I \cap S \neq \phi$

/ /

اذا كان $0 \in S \Leftrightarrow S^{-1}R = \{0\}$

$I := \langle 0 \rangle \Leftrightarrow 0 \in I \cap S \Rightarrow I \cap S \neq \phi$

$\Leftrightarrow S^{-1}R = RS^{-1} = \{0\}$

$\Leftrightarrow I = \langle 0 \rangle$.

سؤال: تحقق اذا كان I مثالي في R فإن $S^{-1}I$ مثالي في $S^{-1}R$

انتهت المحاضرة الخامسة

من السهل ان تجد من تتحدث إليه

لكن من الصعب أن تجد من تثق به.

Galaxy