نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة: التاسعة عشر

◄ عنوان المحاضرة : جداء متسلسلتين

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـاختبار دوبواريموند

٢ـجداء متسلسلتين

٣ـمبرهنة ميرتن ومبرهنة كوشي ومبرهنة آبل

ادرس حسب قيم z تقارب المتسلسلة

$$\sum \frac{1}{n} z^n$$

و هنا نبدأ بتطبيق دالمبير

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \left|\frac{\frac{z^{n+1}}{n+1}}{\frac{z^n}{n}}\right| = |z| \left|\frac{n}{n+1}\right|$$

(و هنا النسبة عدد حقيقي موجب) وبالتالي

$$\lim_{n\to\infty} |z| \left|\frac{n}{n+1}\right| = |z|$$

و هنا نميز ثلاث حالات :

١- $|z| < 1 \Leftarrow l_z < 1$ متسلسلة متقاربة

٢- $|z| > 1 \Leftarrow l_z > 1$ متسلسلة متباعدة

٣- $|z| = 1 \Leftarrow l_z = 1$ يفشل الاختبار

المتسلسلة ليست متقاربة بالإطلاق على لمحيط $D(0,1)$ أي عند $|z| = 1$

و هنا نميز حالتين :

أ- $|ʒ| = 1\ ,ʒ = 1$ وتصبح المتسلسلة

$$ʒ = 1 \implies \sum \left|\frac{ʒ^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$$ ريمانية متباعدة

ب- $|ʒ| = 1\ ,ʒ \neq 1$

ديركليه $a_n = ʒ^n\ ,V_n = \frac{1}{n} \to 0$

$\sum a_n = \sum ʒ^n$ لها مجاميع جزئية محدودة

$\sum(V_n - V_{n+1})$ متقاربة بالإطلاق

و بالتالي لننظر في الاختبار التالي :

اختبار دوبواريموند

إذا تحقق الشرطين ١)- $\sum a_n$ متقاربة

٢)- $\sum(V_n - V_{n+1})$ متقاربة بالإطلاق فإن $\sum a_n V_n$ متقاربة

تمرين: أثبت أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{n}$ متقاربة

$$a_n = \sin\frac{\pi}{n^2}\ ,V_n = \frac{1}{n}$$

$\sum(V_n - V_{n+1})$ متقاربة بالإطلاق (وأثبتنا ذلك سابقا)

$\sum a_n = \sum \sin\frac{\pi}{n^2}$ متقاربة

$\frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \to \pi \neq 0. < \infty$ و بالتالي للمتسلسلتين $\sum \sin\frac{\pi}{n^2}$ و $\sum \frac{1}{n^2}$ الطبيعة ذاتها ولكن $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة

وحسب اختبار وبالتالي ستكون $\sum \sin\frac{\pi}{n^2}$ متقاربة

حسب اختبار دوبوارتموند المتسلسلة متقاربة

تمرين: أثبت أن $\sum \frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{n^2}$ متقاربة بالإطلاق

$$0 \leq \sin\pi \leq 1$$

$$0 \leq \sin\frac{\pi}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

بما أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة فإن يقتضي $\sum\frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{n^2}$ متقاربة وبما أنها ذات الحدود حقيقية غير سالبة فإنها متقاربة بالإطلاق

◄**ملاحظة**: وهنا طلب الدكتور التقارب بالإطلاق وبالتالي لا نستخدم معايير التقارب (دالمبير – دوبواريموند)

جداء متسلستين

لنعرف متسلسلة الجداء $\sum_{n=0}^{\infty}P_n$ لمتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty}z_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}w_n$

ونعرف الجداء بعدة طرق منها :

١) – **تشكيل P_n وفق الخطوات المائلة**

$$\begin{array}{cccc}
\boxed{P_0} & \boxed{P_1} & \boxed{P_3} & \boxed{P_6} \\
z_0w_0 & z_0w_1 & z_0w_2 & z_0w_3\ \dots \\
\boxed{P_2}\swarrow & \boxed{P_4}\swarrow & \boxed{P_7}\swarrow & \\
z_1w_0 & z_1w_1 & z_1w_2 & z_1w_3\ \dots \\
\boxed{P_5}\swarrow & \boxed{P_8}\swarrow & & \\
z_2w_0 & z_2w_1 & z_2w_2 & z_2w_3\ \dots
\end{array}$$

هنا أخذنا P_1, P_0 وبالتالي P_2 هو الأسفل العنصر الذي على يسار P_1 والعمليات التي تجري بينهما هي مجموع كل عنصر من P هو عبارة عن جداء عنصر من z_nw_n وبالتالي تكون جميع الحدود الباقية مستنتجة بخطوط مائلة

٢) – **تشكل P_n وفق مربعات**

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{P_0} & & \boxed{P_1} & \boxed{P_4} & \\
z_0w_0 & & z_0w_1 & z_0w_2 & \dots \\
\boxed{P_3} & & \boxed{P_2}\downarrow & \boxed{P_5}\downarrow & \\
z_0w_0 & \leftarrow & z_0w_1 & z_0w_2 & \dots \\
\boxed{P_8} & & \boxed{P_7} & \boxed{P_6}\downarrow & \\
z_0w_0 & \leftarrow & z_0w_1 \leftarrow & z_0w_2 & \dots
\end{array}$$

وهنا العمليات التي تجري بينهما هي جمع وتشكل لـ P_i بشكل مربعات

٣) – تشكيل P_n وفق كوشي

$$\begin{array}{l} \qquad P_0 \\ \qquad \mathfrak{z}_0 w_0 \quad \mathfrak{z}_0 w_1 \quad \mathfrak{z}_0 w_2 \quad \dots \\ P_1 = \mathfrak{z}_0 w_0 \quad \mathfrak{z}_0 w_1 \quad \mathfrak{z}_0 w_2 \quad \dots \\ P_2 = \mathfrak{z}_0 w_0 \quad \mathfrak{z}_0 w_1 \quad \mathfrak{z}_0 w_2 \quad \dots \end{array}$$

وبالتالي فإن الطريقة الأولى والثانية صعبة في تحديد الصيغة العامة لحد لنونية ولكن طريقة الثالثة نجد لها طريقة لصياغة الحد النوني ومنه

$$P_n = \mathfrak{z}_0 w_n + \mathfrak{z}_1 w_{n-1} + \dots + \mathfrak{z}_n w_0 \Longrightarrow \mathrm{P_n} = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{z}_k w_{n-k}$$

◀**ملاحظة:** وهنا بإمكاننا أن نجعل المتسلسلة تبدأ من الصفر وبالتالي نأخذ الحدود من الصفر الى اللانهاية وبالتالي تصبح كل الحدود التي قبل a_0 نأخذها أصفار $(\mathfrak{z}_{11}, \mathfrak{z}_{00}, \dots)$

◀**ملاحظات :**

١- عندما نقول جداء متسلسلتين فنقصد به جداء كوشي للمتسلسلتين

٢- أن تقارب إحدى متسلسلات الجداء المعرفة بالطرق السابقة لا يقتضي تقارب متسلسلة جداء معرفة بطريقة أخرى
إما أذا كانت أحداها متقاربة بالإطلاق فإن جميعها ستكون متقاربة بالإطلاق ويكون لجميعها المجموع ذاته

٣- أن تقارب متسلسلتين لا يقتضي بالضرورة تقارب متسلسلة الجداء لهما تقاربها

مثال معاكس (متقاربتين و متسلسلة الجداء لهما متباعدة)

أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

متقاربة حسب لايبنتز (حدها العام بالقيمة المطلقة هو حد عام لمتناقصة وحدها العام يسعى الى الصفر) إلا أن جداء هذه المتسلسلة بنفسها متباعدة

$$\left(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$$

لأن لنفرض أن متسلسلة الجداء هي $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$

$$\Longrightarrow P_n = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{z}_k w_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}$$

$$= \underbrace{(-1)^n}_{\text{ثابت المجموع}} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}}_{\text{حدها العام للمتسلسلة الجداء}}$$

$$:(k+1)(n-k+1) = -k^2 + nk + k + n - k + 1$$

$$= -\left(k^2 - nk + \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{4}\right) + 1 + n$$ هنا استخدمنا إتمام لمربع كامل

$$= -\left(k - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{4} + n + 1$$

$$= -\left(k - \frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2$$

طرح حدين و أخذنا الحد الأكبر لإزالة منه المطروح

$$(k+1)(n-k+1) \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{2}{n+2}$$

و هنا سيكون المجموع $n+2$ مرة وبالتالي

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{2(n+1)}{n+2}$$

$$|P_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

$$b_n \geq a_n$$

متباعدة $P_n \nrightarrow 0$ وأيضاً $|P_n| \nrightarrow 0$ وبالتالي $\lim b_n \geq \lim a_n$

وبالنتيجة : $|P_n| \nrightarrow 0 \Longleftarrow$ إذا الطويلة غير متقاربة من الصفر وهذا يؤدي إلى أن P_n لا تسعى إلى الصفر $\sum P_n$ متباعدة

مبرهنة ميرتن

إذا كانت $\sum z_n , \sum w_n$ متسلسلتين عقديين إحداهما متقاربة والأخرى متقاربة بالإطلاق فإن جداء كوشي لها متسلسلة متقاربة وفي حاله التقارب يكون مجموع متسلسلة الجداء مساوياً لجداء مجموعتين $\sum z_n , \sum w_n$

مبرهنة كوشي

إذا كان $S = \sum z_n , \sigma = \sum w_n$ متسلسلتين متقاربتين بالإطلاق فإن متسلسلة الجداء لهما ستكون متقاربة بالإطلاق فإن $\sum P_n = S.\sigma$

مبرهنة آبل

إذا كانت المتسلسلتان $\sum z_n , \sum w_n$ والمتسلسلة الجداء لهما $\sum P_n$ متسلسلات متقاربة وكانت مجاميع هذه المتسلسلات σ , S , P على الترتيب فإن $P = \sigma.S$

مثال ليكن z_1 , z_2 عقدين اختيارين أثبت أن المتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} , \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}$ متقاربتان بالإطلاق ثم عين متسلسلة الجداء لهما وأوجد مجموعهما

الحل

لنثبت أن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ متقاربة بالإطلاق

أياً كانت z من $\mathbb{C}$ سنطبق اختبار دالمبير $\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} . \frac{n!}{z^n}\right| = \frac{1}{n+1} |z| \to 0 < 1$$

حسب دالمبير متسلسلة متقاربة بالإطلاق

لنفرض أن $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$ هي متسلسلة الجداء للمتسلسلتين ١) و ٢)

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} z_n w_{n-k}$$

$$= \sum \frac{3_1^n}{n!} \cdot \frac{3_2^{n-k}}{(n-k)!}$$

ضرب بـ $n!$ ونقسم على $n!$ لحصول على قانون التوافيق

$$= \frac{1}{n!} \sum 3_1^k 3_2^{n-k} \frac{n!}{(n!)(n-k)!} = \sum \frac{(3_1 + 3_2)^n}{n!}$$

(منشور ثنائي الحد النوني) فمتسلسلة الجداء هي $\sum \frac{(3_1+3_2)^n}{n!}$

◄ملاحظة :

في فصل التوابع سنعرف تابع الأسي العقدي على $\mathbb{C}$ بالمساواة

$$\underbrace{e^3}_{\text{مركز مجموع}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

$$e^{3_1+3_2} = e^{3_1} . e^{3_2}$$

وقد يأتي كسؤال أثبت $e^{3_1+3_2} = e^{3_1} . e^{3_2}$

انتهت المحاضرة

إعداد: مهيار طعمه – شهناز طاطيش – يمنى خرما