تكلمنا في المحاضرة السابقة عن:
دالة لاغرانج لحل المسألة ① من الشكل القياسي

$$\min f(x)$$
$$s.t \quad g(x) = b_i$$
$$x \geq 0$$

* **دالة لاغرانج:**

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(g_i(x) - b_i\right)$$

تعريف الدالة المرافقة (الثنوية):

$$d(\lambda) = \min_{x \in X} \mathcal{L}(x,\lambda) = \mathcal{L}\left(x^*(\lambda),\lambda\right)$$

منطلقة:

$$Y = \{ x \in X : \min_{x \in X} \mathcal{L}(x,\lambda) \}$$

مثال: ليكن لدينا البرنامج التالي:

$$\min_{(x,y) \in R^2} f = (x-3)^2 + (y-4)^2$$
$$s.t \begin{cases} x+y = 15 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

1. أوجد دالة لاغرانج 2. الدالة المرافقة
3. أوجد قيمة λ لتجعل $(x^*(\lambda), y^*(\lambda))$ حلاً

الحل:

هنا دالة الهدف بمتحولين $(x,y) \in R^2$ لدينا معادلة واحدة للشروط بالمسألة ⟸
لدينا λ واحدة فقط
معادلة واحدة ⟸ λ واحدة

/ /

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \underbrace{(x-3)^2 + (y-4)^2}_{f \text{ دالة الهدف}} - \underbrace{\lambda(x+y-15)}_{\sum_{i=1} \lambda_i (g_i(x) - b_i) \, = \lambda(g(x,y)-b)}$$

$\boxed{2}$ الدالة المرافقة تابعة لـ λ فقط.

$$d(\lambda) = \underset{(x,y)\in R^2}{Min} \mathcal{L}(x,y,\lambda)$$

لمعرفة وجود Min للدالة / نوجد المشتق الأول والمشتق الثاني نبرهن أنه (أكبر أو يساوي الصفر)

طريقة وجود Max للدالة نوجد أولاً " " ونعدمه ونوجد المشتق الثاني اذا كان أصغر أو يساوي الصفر

اذا يوجد Max للدالة

$$\mathcal{L}_x = 2(x-3) - \lambda \quad , \quad \mathcal{L}_y = 2(y-4) - \lambda$$

(قمنا بالاشتقاق بالنسبة لـ x ولـ y)

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

هل هذه المصفوفة معرفة موجبة ؟!

$\boxed{١٢}$ $$z^T H z = [z_1, z_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 2z_1^2 + 2z_2^2 \geq 0$$

H $\Leftarrow$ معرفة موجبة وبالتالي يوجد نهاية صغرى لـ $\mathcal{L}(x,y,\lambda)$

نعدم المشتقات لنوجد x و y بدلالة λ لأن الدالة المرافقة $d(\lambda)$ تابعة لـ λ فقط (بدلالة λ)

$$\mathcal{L}_x = 2x - 6 - \lambda = 0$$
$$\mathcal{L}_y = 2y - 8 - \lambda = 0$$

$$\Longrightarrow x^*_{(\lambda)} = \frac{6+\lambda}{2} \quad , \quad y^*_{(\lambda)} = \frac{8+\lambda}{2}$$

نعوض في الدالة المرافقة :

$$d(\lambda) = \underset{(x,y)\in R^2}{Min} \mathcal{L}(x,y,\lambda) = \left(\frac{6+\lambda}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{8+\lambda}{2} - 4\right)^2 - \lambda$$

$$\left(\frac{6+\lambda}{2} + \frac{8+\lambda}{2} - 19\right)$$

$$Y = \{ (x,y) \in R^2 : x = \frac{6+\lambda}{2} , y = \frac{8+\lambda}{2} \}$$

أو $\quad L_x = 0 \quad , \quad L_y = 0$

تكون نقطة حل للمسألة إذا حققت شروطها:

$$(x^*(\lambda), y^*(\lambda)) = \left(\frac{6+\lambda}{2}, \frac{8+\lambda}{2} \right)$$

لتكون حل للمسألة يجب أن تحقق شروط المسألة

$$x+y=15 \Rightarrow \frac{6+\lambda}{2} + \frac{8+\lambda}{2} = 15 \Rightarrow \lambda = 8.$$

حل أمثل. $\Rightarrow (x^*(8), y^*(8)) = (7,8)$

ملاحظة: غالباً معرف λ أنه شعاع ينتمي لـ R^m في مسألتنا هنا $m=1$ بالتالي $\lambda \in R$ أي الشعاع λ لمركبة واحدة أي لدينا معادلة واحدة فقط

مبرهنة المرافق الضعيف

دائماً حل المرافق يكون أدنى من حل مسألة الأساسية فيمكن أن تكون أصغر أو تساوي حل المسألة الأساسية

$$\min_{x \in X} f(x) = \min_{x \in X(b)} L(x,\lambda) \geq \min L(x,\lambda) = d(\lambda)$$

مبرهنة المرافق الأقوى: (= المساواة)

حل المسألة الأساسية يساوي حل المسألة المرافقة وذلك في حال المسألة كانت محدبة

{ دالة الهدف: دائرة
و الشرط مستقيم: مسألة محدبة تماماً }

المسألة الأساسية هي:
المسألة ①

$$\left[\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in X} f(x) & \\ \text{s.t} \quad g_i(x) = b_i & x \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m \end{array} \right]$$

المسألة المرافقة:

أوجد لها

$$\left[\begin{array}{ll} \max & d(\lambda) \\ \text{s.t} & \lambda \in Y \ \text{المنطلق} \end{array} \right] \quad *$$

حل ① $\Longleftrightarrow$ حل * في حال كانت المسألة محدبة

* أي في حال كانت مسألتنا محدبة نستطيع حل المسألة الأساسية أو المسألة المرافقة نختار الأسهل لنا

* اذا كانت الأساسية Min فالمسألة المرافقة تتحول لـ Max. [طالما مسألتنا محدبة لم نجد فقط الحد الأدنى بل نجد الحل]

مثال آخر:

$$\underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{Min}\ x^2+y^2-2xy$$

$$s.t. \begin{cases} x+y=19 \\ x-y=8 \end{cases}$$

(1) أوجد دالة لاغرانج (2) أوجد الدالة المرافقة.

(3) أوجد البرنامج المرافق (المسألة المرافقة).

الحل: (1) دالة لاغرانج:

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = x^2+y^2-2xy-\lambda_1(x+y-19)-\lambda_2(x-y-8)$$

(2) الدالة المرافقة

$$d(\lambda) = \underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{Min}\ L(x,y,\lambda_1,\lambda_2)$$

$$L_x = 2x-2y-\lambda_1-\lambda_2=0 \quad *$$

$$L_y = 2y-2x-\lambda_1+\lambda_2=0 \quad (**)$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$z^T H z = (2z_1^2-4z_1z_2+2z_2^2) = 2(z_1-z_2)^2 \geq 0$$

$\Leftarrow$ H معرفة موجبة $\Leftarrow$ يوجد نهاية صغرى لـ دالة لاغرانج L

[معادلتين بـ 2 مجاهيل نختار 2 نقط] ** و *

$\Leftarrow$ $x=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}+y$ نعوض x في **

$$2y-2\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}+y\right)-\lambda_1+\lambda_2=0$$

$$-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_1+\lambda_2=0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1=0}$$

نعوض λ_1 في * و **

$x=\frac{\lambda_2}{2}+y \Leftarrow 2x-2y-\lambda_2=0$

بالتعويض $\rightarrow$ $2y-2x+\lambda_2=0$ $\Rightarrow \lambda_2=0 \Rightarrow 2x-2y=0$

$$2y-2\left(\frac{\lambda_2}{2}+y\right)+\lambda_2=0 \Rightarrow \quad 2y-2x=0$$

$x^*(\lambda) = y^*(\lambda)$

$d(\lambda) = \text{Min}\left(x^2+y^2-2xy\right) - \lambda_1(x+y-15) - \lambda_2(x-y-3)$

$= \text{Min}\left(x^2+x^2-2x^2\right) = 0$

$Y = \{(x,y) \in R^2 \quad L_x = 0, \; L_y = 0\}$

$Y = \{(x,y) \in R^2 : 2x-2y-\lambda_1-\lambda_2 = 0 , \; 2y-2x-\lambda_1+\lambda_2 = 0\}$

البرنامج المرافق :

$\text{Max } d(0)$

$\text{s.t } -\lambda_1 - \lambda_2 + 2x - 2y = 0$

$-\lambda_1 + \lambda_2 + 2y - 2x = 0$

The end ^_^