نظري

◄ دكتور المادة: ريما القمحة

◄ المحاضرة: السادسة عشر عنوان المحاضرة **Liner Algebra**

بعض المفردات هامة لفهم النص

Matrix	مصفوفة	Null matrix	مصفوفة صفرية
Matrices	مصفوفات	Original matrix	مصفوفة أصلية
Row	سطر	Upper triangular	مثلثية عليا
Column	عمود	Lower triangular	مثلثية دنيا
Notation	ترميز-ملاحظة	Symmetric matrix	مصفوفة تناظرية
Vector	متجه	Skew-symmetric matrix	مصفوفة تناظرية متخالفة
Component	مركبة	Interchanging	تبديل
Diagonal	قطري	Determinant	محدد
Operations	عمليات	Diagonal matrix	مصفوفة قطرية
Computing	حساب	Identity matrix	مصفوفة واحدية

A.1 Definitions

A matrix of dimensions (m×n) : with m and n positive integers , is an array of elements a_{ij} arranged into m rows and n columns:

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (A.1)$$

If m=n , the matrix is said to be square ; if m<n , the matrix has more columns than rows ; if m>n the matrix has more rows than columns . Further . If n=1 the notation (A.1) is used to represent a (column) vector a of dimensions (m×1) ; the elements a_i are said to be vector components . A square matrix A of dimensions (n×n) is said to be upper triangular if $aij = 0 \; for \; i > j$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

The matrix is said to be lower triangular if $a_{ij} = 0 \; for \; i < j$

An (n×n) square matrix A is said to be diagonal if $a_{ij} = 0\ for\ i \neq j$ i.e,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} == diag\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$$

If an (n×n) diagonal matrix has all unit elements on the diagonal ($a_{ii} = 1$) , the matrix is said to be identity and denoted by I_n^2. A matrix is said to be null if all elements are null and is denoted by **0** . The null columns vector us denoted by **0**.

The transpose A^T of matrix A of dimensions (m×n) is the matrix of dimensions (n×m) which is obtained from the orginal matrix by interchanging its rows and columns:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (A.2)$$

The transpose of a columns vector a is the row vector a^T

An (n×n) square matrix A is said to be symmetric if $A^T = A$, and thus $a_{ij} = a_{ji}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

An (n×n) square matrix A is said to be skew-symmetric if $A^T = -A$ thus leading to $a_{ij} = -a_{ji}\ for\ i \neq j\ and\ a_{ii} = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

A Partitioned matrix is a matrix whose elements are matrices (blocks) of porper dimension :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

A.2 Matrix Operations :

The trance of an (n×n) square matrix A is the sum of the elements on the diagonal :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad (A.3)$$

Two matrices A and B of the same dimensions (m×n) are equal if $a_{ij} = b_{ij}$.If A and B are two matrices of the same dimensions , their sum is the matrix

C=A+B

The row –by –column product of a matrix A of dimensions (m×p) by a matrix B of dimensions (p×n) is the matrix of dimensions (m×n)

C=AB

Notice that , in general ,$AB \neq BA$ and AB=**0** does not imply that A=**0** or B=**0** ; further , notice that AC=BC does not imply that A=B.

For an (n×n)square matrix A , the determinant of A is the scalar given by following expression . Which holds $\forall i = 1,2, \dots n$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \qquad (\mathrm{A}.9)$$

The determinant can be computed according to any row i as in (A.9) ; the same result is obtained by computing it according to any column j. if n=1 m then $\det(a_{11}) = a_{11}$

The following property holds :

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Moreover , interchanging two generic columns p and q of a matrix A yields :

$$\det([a_1 \dots \dots a_p \dots . a_q \dots . a_n]) = -\det\{[a_1 \dots . a_q \dots a_p \dots a_n]\}$$

As a consequence , if a matrix has two equal columns (rows). Then is determinant is null . Also m it is $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

<u>If A is an (n×n) triangular matrix (in particular diagonal) , then :</u>

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

الترجمة :

الجبر الخطي

تعاريف: المصفوفة ذات الأبعاد $(m \times n)$ ، حيث أن n وm أعداد صحيحة موجبة هي متجهة عناصر a_{ij} مرتبة إلى m سطر و n عمود :

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (A.1)$$

-إذا كان $m=n$ فإننا نقول عن المصفوفة أنها مربعة

-إذا كانت $m<n$ فإن المصفوفة لها أعمدة أكثر من الأسطر

-إذا كانت $m>n$ فإن المصفوفة لها أسطر أكثر من الأعمدة

و أيضاً إذا كان $n=1$ فإن الترميز $(A.1)$ تستخدم لتمثيل (العمود) الشعاع a الذي له بعد واحد $(m \times 1)$ و يقال عن العناصر a_i أنها مركبات المتجه. يقال عن المصفوفة المربعة A ذات البعد $(n \times n)$ أنها مثلثية عليا إذا كان $a_{ij} = 0$ من أجل $i>j$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

-يقال عن المصفوفة أنها مثلثية دنيا إذا كان $a_{ij} = 0$ من أجل $j>i$

-يقال عن المصفوفة المربعة ذات البعد $(n \times n)$ أنها قطرية إذا كان $a_{ij} = 0$ من أجل $i \neq j$ أي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = diag\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$$

-إذا كانت المصفوفة القطرية ذات البعد $(n \times n)$ ، عناصر قطرها مساوية للواحد ، عندئذٍ نقول عن المصفوفة أنها واحدية و يرمز لها بـ I_n^2 . يقال عن المصفوفة أنها صفرية إذا كانت كل عناصرها تساوي الصفر و نرمز لها بـ 0 .

الشعاع العمودي الصفري يرمز له بـ 0.

-**منقول مصفوفة A^T :** لمصفوفة A من البعد $(m \times n)$ هي مصفوفة من البعد $(n \times m)$ مستخلصة من الأصلية بتبديل الأسطر بالأعمدة .

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (A.2)$$

-إن منقول الشعاع العمودي a هو الشعاع السطري a^{T} .

-يقال عن المصفوفة المربعة A أنها تناظرية إذا كان $A^T = A$ و بالتالي $\mathrm{a}_{\mathrm{ij}} = a_{ji}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

-يقال عن المصفوفة المربعة أنها تناظرية متخالفة إذا كان $A^T = -A$ و بالتالي : $a_{ij} = -a_{ji}$ من أجل $i \neq j$ و $a_{ii} = 0$ و هذا يعطي :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

-المصفوفة المجزئة هي المصفوفة التي عناصرها عبارة عن مصفوفات (كتل) من أبعاد مناسبة :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

العمليات على المصفوفات :

-إن أثر المصفوفة A المربعة ذات $(n \times n)$ هو مجموعة عناصر القطر الرئيسي:

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad (A.3)$$

تكون المصفوفة A وB حيث لهما نفس البعد $(m \times n)$ متساويتان إذا كان $a_{ij} = b_{ij}$

-إذا كانت A و B مصفوفات من البعد نفسه ، يكون مجموعهما $C = A + B$

-إن الجداء السطري العمودي (سطر بعمود) لمصفوفة A من البعد $(m \times p)$ بالمصفوفة B من البعد $(p \times n)$ هو المصفوفة ذات البعد $(m \times n)$: $C = AB$

-لاحظ أنه بشكل عام $AB \neq BA$ و أن $AB = 0$ لا تكافئ أن $A = 0$ أو $B = 0$. إضافة إلى ذلك ، لاحظ أن $AC = BC$ لا يكافئ أن $A = B$

-من أجل مصفوفة مربعة A ذات البعد $(n \times n)$ محدد المصفوفة A هو القيمة العددية المعطاة بالصيغة المحققة من أجل كل $\mathrm{i} = 1,2, \dots \mathrm{n}$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \qquad (A.9)$$

-يمكن حساب المحدد وفقاً لأي سطر : كما في الشكل $(A.9)$ النتيجة المجموعة حصلنا عليها وفقاً لأي عمود j . إذا كانت $n=1$ عندئذٍ محدد $\det(a_{11}) = a_{11}$

إن الخاصة التالية محققة : $\det(A) = \det(A^T)$

-أكثر من ذلك ، إن تبديل عمودين كيفيين p,q من المصفوفة A يعطي :

$$\det([a_1 \dots \dots a_p \dots . a_q \dots . a_n]) = -\det\{[a_1 \dots . a_q \dots a_p \dots a_n]\}$$

-نتيجة ، إذا كانت مصفوفة لها عمودين (سطرين) متساويين عندئذٍ محددها هو الصفر ، و أيضاً المحدد $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

-إذا كانت A مصفوفة مثلثية من البعد $(n \times n)$ بالنسبة لقطر معين عندئذٍ :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: سهى العلي – نذير تيناوي