Syria Math

◄دكتور المادة: خليل تحيى

◄المحاضرة : الواحدة والعشرون

◄عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية الخطية بأمثال متحولة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـالمعادلات التفاضلية الخطية بأمثال متحولة ترد إلى معادلات تفاضلية ذات أمثال ثابتة.
٢ـأشكالها مع أمثلة لتوضيحها.

المعادلات التفاضلية الخطية بأمثال متحولة ترد إلى معادلات تفاضلية ذات أمثال ثابتة

١ـمعادلة أولر:

لها الشكل التالي:

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x) \ldots (1)$$

حيث $a_0, a_1, \ldots, a_n$ أمثال ثابتة.

إذا كانت $f(x) = 0$ تصبح المعادلة (1) متجانسة ولإيجاد الحل العام للمعادلة (1) نجري التحويل التالي:

$$t = \ln x \quad or \quad x = e^t$$

$$dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \Rightarrow y'_x = e^{-t} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x} \cdot y'_t$$

$$y''_x = \frac{d2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$y''_x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}.\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{dy}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow y''_x = \frac{1}{x^2}(y''_t - y'_t)$$

حيث $d2y$ هو المشتق الثاني لـy .

$$\Rightarrow xy'_x = y'_t$$

$$x^2y''_x = y''_t - y'_t$$

$$\vdots$$

$$\boxed{x^k y^{(k)} = B_k.\frac{dky}{dt^k} + B_{k-1}.\frac{d(k-1)y}{dt^{k-1}} + \cdots + B_1.\frac{dy}{dt}}$$

القانون العام.

مثال : أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

$\boxed{1}$ $$x^2y'' + 2xy' + 2y = 0$$

الحل

هي معادلة من نوع أولر (يجب أن نشتق أولاً)

نفرض أنّ: $x = e^t$ ثم نشتق فنحصل على:

$$dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} \Rightarrow y'_x = e^{-t}.\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}.y'_t$$

$$y''_x = \frac{d2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$y''_x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}.\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{dy}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow y''_x = \frac{1}{x^2}(y''_t - y'_t)$$

$$\Rightarrow x^2y'' = y''_t - y'_t\,, \qquad xy' = y'_t$$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$\Rightarrow y''_t - y'_t - 2y'_t + 2y = 0 \Rightarrow y''_t - 3y'_t + 2y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة والمعادلة المميزة لها:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$$

ومنه الحل العام من الشكل:

$$y = c_1e^{2t} + c_2e^t$$

نعوض قيمة e^t فنحصل على: $y = c_1x^2 + c_2x$

$$\boxed{2} \quad x^2y'' + 3xy' + y = x$$

الحل

نأخذ المعادلة بدون طرف ثانٍ:

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0 \ldots (1)$$

نفرض أنّ: $x = e^t$ نشتق فنحصل على:

$$dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \Rightarrow y'_x = e^{-t}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}\cdot y'_t$$

$$y''_x = \frac{d2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$y''_x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{dy}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow y''_x = \frac{1}{x^2}(y''_t - y'_t)$$

$$\Rightarrow x^2 y'' = y''_t - y'_t \quad , \quad xy' = y'_t$$

نعوض في المعادلة التفاضلية (1) :

$$y''_t - y'_t + 3y'_t + y = 0 \Rightarrow y''_t + 2y'_t + y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة والمعادلة المميزة لها:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$$

جذر مكرر: $\lambda_{1,2} = -1$

الحل العام بدون طرف ثانٍ من الشكل:

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} t$$

ثانياً: نوجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة:

نلاحظ أنّ $\alpha = 1$ هو جذر للمعادلة المميزة إذاً الحل الخاص:

$$y_P = Ae^t$$

لإيجاد A نشتق:

$$y'_P = Ae^t \quad , \quad y''_P = Ae^t$$

نعوض في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ:

$$Ae^t + 2Ae^t + Ae^t = e^t \Rightarrow 4Ae^t = e^t b \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

وبالتالي الحل الخاص يكون من الشكل:

$$y_P = \frac{1}{4} e^t$$

ومنه يكون الحل العام مع طرف ثانٍ:

$$Y = y + y_P \Rightarrow Y = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + \frac{1}{4} e^t$$

$$Y = c_1.\frac{1}{x} + c_2 ln\frac{1}{x} + \frac{1}{4}x$$

٢ـ معادلة لوجندر التفاضلية:

لها الشكل:

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = q(x) \ldots (1)$$

-إما نفرض أنّ: $ax + b = h$ وهنا التحويل يعطينا معادلة أولر ثم معادلة ذات أمثال ثابتة.

-أو نفرض أنّ $ax + b = e^t$ يعطينا مباشرة معادلة ذات أمثال ثابتة.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

$$\boxed{1} \quad (x+2)y'' + (x+2)y' + y = 3x + 4$$

الحل

نلاحظ أنّ المعادلة لها شكل معادلة لوجندر إذاً نردها إلى معادلة ذات أمثال ثابتة.

نفرض أنّ:

$$x + 2 = e^t \Rightarrow x = e^t - 2$$

$$t = ln\,(x+2) \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x+2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x+2}.\frac{dy}{dt} \Rightarrow y'_t = \frac{1}{x+2}.y'_x$$

$$y''_x = \frac{d2y}{x^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+2}.\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{(x+2)^2}.\frac{dy}{dt} + \frac{1}{(x+2)^2}.\frac{d2y}{dt^2}$$

$$y''_x = \frac{1}{(x+2)^2}(y''_t - y'_t) \Rightarrow (x+2)^2 y''_x = y''_t - y'_t$$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$y''_t - y'_t - y'_t + y = 3(e^t - 2) + 4$$

$$\Rightarrow y_t'' - 2y_t' + y = 3e^t - 2 \;....\; (*)$$

وهكذا ردت إلى معادلة خطية متجانسة ذات أمثال ثابتة.

والآن نوجد الحل العام بدون طرف ثانٍ:

$$y_t'' - 2y_t' + y = 0$$

المعادلة المميزة لها:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1$$

جذر مكرر فيكون الحل العام من الشكل:

$$y = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

نوجد الحال الخاص للمعادلة غبر المتجانسة:

نلاحظ أنّ $\alpha = 1$ تمثل جذرا مضاعفا للمعادلة المميزة ومنه الحل الخاص يكون من الشكل:

$$y_P = At^2 e^t + B$$

$$y_P' = 2Ate^t + At^2 e^t$$

$$y_P'' = 2Ae^t + 4Ate^t + At^2$$

نعوض في المعادلة (*) مع طرف ثانٍ:

$$2Ae^t + 4Ate^t + At^2 - 4Ate^t - 2At^2 e^t + At^2 e^t + B = 3e^t - 2$$

$$\Rightarrow 2Ae^t + B = 3e^t - 2$$

$$A = \frac{3}{2} \quad , \quad B = -2$$

وبالتالي الحل الخاص يكون من الشكل:

$$y_P = \frac{3}{2} t e^t - 2$$

وبالتالي يكون الحل العام مع طرف ثانٍ من الشكل:

$$Y = y + y_P$$

$$= c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{3}{2} t^2 e^t - 2$$

نعوض قيمة e^t فنحصل على الحل العام مع طرف ثانٍ :

$$Y = c_1(x+2) + c_2(x+2)ln\,(x+2) + \frac{3}{2}(x+2)ln^2(x+2) - 2$$

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصرالله وياسين الحلبي ورهف النقشي