حل أسئلة الدورات

أسئلة الدورة الفصلية الأولى (٢٠١٧) :

السؤال الأول : برهن :لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ مستمرة ومعرفة على المجال المغلق $I = [a,b]$ حيث $-\infty < a < b < +\infty$ وبفرض أن هذه المتتالية متقاربة بانتظام على I من تابع النهاية $f(x)$ عندئذٍ التابع $f(x)$ قابل للمكاملة على I ويحقق العلاقة:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

السؤال الثاني :

١) ادرس تقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ المعرفة على $]-1,1[$.

٢) ادرس التقارب (المنتظم وغير المنتظم) لمتتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad ; \quad I = [0,1]$$

السؤال الثالث :

١) أثبت قاعدة ليجاندر $\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}.\Gamma(2p)$

٢) ادرس تقارب التكامل

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}dx \quad : a > 0$$

٣) أحسب قيمة التكامل

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$$

السؤال الرابع :

١) أحسب التكامل

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-kx}\frac{1-\cos\alpha x}{x}dx \quad \alpha, k > 0$$

٢) انشر التابع $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ في متسلسلة فورييه على المجال $]-\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\pi}[$ مع رسم بيان دالة المجموع للمتسلسلة على $\boldsymbol{R}$.

انتهت الأسئلة

حل أسئلة الدورة الفصلية الأولى (٢٠١٦-٢٠١٧) :

السؤال الأول

الحل : بما أن التوابع $f_n(x)$ في المتتالية مستمرة على $[a,b]$ و المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$

يكون التابع $f(x)$ مستمراً و بالتالي قابل للمكاملة على $[a,b]$ و لدينا :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

نأخذ $\varepsilon > 0$ و بالتالي $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$

يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون:

$$\left|\underbrace{\int_a^b f_n(x)dx}_{\text{الحد العام}} - \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{النهاية}}\right| = \left|\int_a^b [f_n(x)dx - f(x)]dx\right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$$

حيث $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ تكون المتتالية متقاربة بانتظام

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

السؤال الثاني

الحل : ١) نأخذ متتالية مجاميعها الجزئية $s_n(x)$

$$s_n(x) = (x - x^2) + (x^2 - x^3) + \cdots + (x^{n-1} - x^n) + (x^n - x^{n+1})$$

$$\Rightarrow s_n(x) = x - x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x - x^{n+1}) = x - \lim_{n\to\infty} x^{n+1} = x \;\; : |x| < 1$$

وبالتالي متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} x^n - x^{n+1}$ المعرفة على المجال $]-1,1[$ متقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n - x^{n+1} = \mathrm{x} \ : \mathrm{x} \in]-1,1[$$

---

٢) لنأخذ تابع النهاية:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$$

لأن درجة البسط أصغر من درجة المقام.

ولنوجد نهاية

$$\lim_{n\to\infty} \sup|f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| = 0 \quad ; \quad x \in [0,1]$$

عندما $x = \frac{1}{n}$ نلاحظ أن $f_n(x)$ يبلغ نهاية عظمى وقيمته عند هذه النقطة هي $\frac{1}{2}$

إذاً:

$$\lim_{n\to\infty} \sup\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad ; \quad x \in [0,1]$$

وبالتالي المتتالية غير متقاربة بانتظام حسب المبرهنة (٤)

$$\sup \frac{nx}{1+n^2x^2} = \sup \begin{cases} 0 & ; \quad x = 0 \\ \dfrac{n}{1+n^2} & ; \quad x = 1 \\ 0 & 0 < x \neq \dfrac{1}{n} < 1 \\ \dfrac{1}{2} & ; \quad x = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

السؤال الثالث

---

١) لدينا

$$B(p,p)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}\,dx=\int_0^1 (x-x^2)^{p-1}\,dx$$

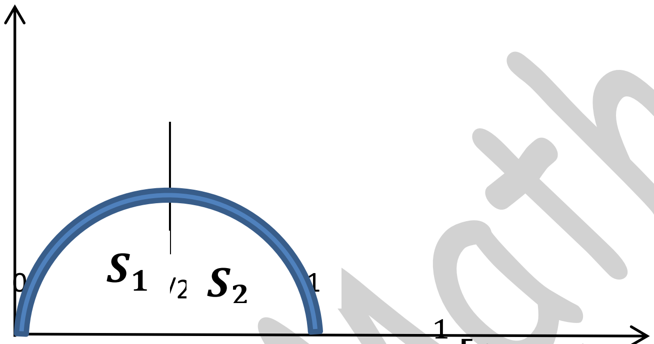
نقوم بالإتمام إلى مربع كامل حيث

$$(x-x^2)=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$$

بالعودة للتكامل السابق و التعويض :

$$B(p,p)=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}\,dx$$

و لما كان التابع $f(x)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$ يرسم قطعاً مكافئاً فإنه يكون متناظراً بالنسبة لمحور تناظره $x=\frac{1}{2}$



$$B(p,p)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}\,dx$$

نفرض $\frac{1}{4}t=\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$

أو:

$$\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

نفاضل الطرفين:

$$\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\,dt=-dx$$

$$\Longrightarrow dx=-\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

بالتعويض بالتكامل:

$$B(p,p) = -2\int_1^0 \left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}t\right)\right]^{p-1} .\left(-\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\right)\,dt$$

$$= -2\int_1^0 \frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t\right]^{p-1}\,dt$$

$$= -2\int_1^0 \frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}(1-t)\right]^{p-1}\,dt$$

$$= -\frac{2.1}{4}\int_1^0 t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}(1-t)\right]^{p-1}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 t^{-\frac{1}{2}}.(1-t)^{p-1}.\frac{1}{4^{p-1}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}.\frac{1}{4^{p-1}}\int_1^0 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2^{2p-2}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$\Longrightarrow B(p,p) = \frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

العلاقة بين تكاملي أولر حيث: $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

هنا:

$$B(p,p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(p+p)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}}B\left(-\frac{1}{2}+1\,,p-1+1\right)$$

$$= \frac{1}{2^{p-1}}B\left(\frac{1}{2},p\right)$$

لقد حصلنا على $B\left(\frac{1}{2},p\right)$ من الأسس حيث $t^{-\frac{1}{2}}$ أسه $-\frac{1}{2}$ نضيف له واحد فيصبح $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ وحصلنا على الـp من أس $(1-t)^{p-1}$ نضيف للأس واحد فيصبح $p-1+1=p$ ولذلك $B\left(\frac{1}{2},p\right)$

ومنه:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)}=\frac{1}{2^{2p-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{2p-1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)\Gamma(2p)$$

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{2p-1}}\Gamma(p)\Gamma(2p)$$

حيث $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ كما حسبناه بالمحاضرة السابقة.

ومنه:

$$\boxed{\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)}$$

---

٢) في الحقيقة إن وجود القيمة المطلقة في التابع المكامل و كون مجال المكاملة هو $]-\infty,+\infty[$ فلا بد أن نتخلص من القيمة المطلقة و ذلك كما يلي :

لما كان :

$$|x|=\begin{cases} x & : x\geq 0 \\ -x & : x<0 \end{cases}$$

يمكن تقسيم مجال المكاملة كما يلي :

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}dx=\int_{-\infty}^{0} e^{ax}dx+\int_{0}^{+\infty} e^{-ax}dx=I_1+I_2$$

و لنحسب كل منهما على حدى أيضاً :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} e^{ax}dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{0} e^{ax}dx = \frac{1}{a}\lim_{A\to-\infty}[e^{ax}]_A^0 = \frac{1}{a}[1-e^{aA}] = \frac{1}{a}$$

$$I_2 = \int_{0}^{+\infty} e^{-ax}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{0}^{A} e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}\lim_{A\to+\infty}[e^{-ax}]_0^A =$$

$$= -\frac{1}{a}\lim_{A\to+\infty}[e^{-aA}-1]_0^A = \frac{1}{a}$$

وبالتالي :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{2}{a}$$

فالتكامل المعطى متقارب و قيمته $\frac{2}{a}$.

---

٣) هذا التكامل من الشكل:

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$$

حيث:

$$p-1 = \frac{1}{4} \Longrightarrow p = \frac{1}{4}+1 = \frac{5}{4}$$

$$p+q = 2 \Longrightarrow q = 2-p = 2-\frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$J = \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}dx = \mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}$$

نذكر أن:

$$\frac{5}{4} = \frac{1}{4}+1 \quad , \quad \frac{3}{4} = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1.\Gamma(1) = 1$$

ومنه:

$$J=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}{1}$$

$$J=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

حيث نلاحظ أنها من الشكل:

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)$$

فحسب قاعدة ليجاندر:

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)$$

بالعودة للمثال:

$$J=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\left(\frac{1}{4}\right)-1}}\Gamma\left(2\left(\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-\frac{1}{2}}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$J=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-\frac{1}{2}}}.\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{2}.\pi}{4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

السؤال الرابع

---

١) نطبق قاعدة لايبتنز :

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_{0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}e^{-kx}\frac{1-\cos\alpha x}{x}dx=\int_{0}^{\infty}e^{-kx}\frac{x\sin\alpha x}{x}dx=\int_{0}^{\infty}e^{-kx}\sin\alpha x\,dx$$

>>الاشتقاق كان بالنسبة لـ α و ليس x أما الآن فسنكامل بالنسبة لـ x و ذلك بالتجزئة إذ نفرض :

$$u=e^{-kx}\Rightarrow du=-ke^{-kx}dx$$

$$dv=\sin\alpha x\,dx\Rightarrow v=-\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x$$

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\left[-\frac{e^{-kx}}{\alpha}\cos\alpha x\right]_0^{\infty}-\frac{k}{\alpha}\int_0^{\infty}e^{-kx}\cos\alpha x\,dx=\frac{1}{\alpha}-\frac{k}{\alpha}\int_0^{\infty}e^{-kx}\cos\alpha x\,dx$$

نطبق التجزئة مرة أخرى :

$$u=e^{-kx}\Rightarrow du=-ke^{-kx}dx$$
$$dv=\cos\alpha x\,dx\Rightarrow v=\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x$$

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\frac{1}{\alpha}-\frac{k}{\alpha}\left(\underbrace{\left[\frac{e^{-kx}}{\alpha}\sin\alpha x\right]_0^{\infty}}_{=0}+\underbrace{\frac{k}{\alpha}\int_0^{\infty}e^{-kx}\sin\alpha x\,dx}_{\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}}\right)$$

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\frac{1}{\alpha}-\frac{k^2}{\alpha^2}\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}\Rightarrow\left(1+\frac{k^2}{\alpha^2}\right)\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\frac{1}{\alpha}$$
$$\Rightarrow\frac{\alpha^2+k^2}{\alpha^2}\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\frac{1}{\alpha}\Rightarrow\Rightarrow\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha^2+k^2}$$

حصلنا على معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات كما يلي :

$$dI(\alpha)=\frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2+k^2}$$
$$\Rightarrow I(\alpha)=\int\frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2+k^2}=\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+k^2)+c$$

لحساب الثابت c :

$$0=I(0)=\frac{1}{2}\ln(k^2)+c\Rightarrow c=\frac{1}{2}\ln(k^2)$$

نعوض :

$$\boxed{I(\alpha)=\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+k^2)-\frac{1}{2}\ln(k^2)=\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{\alpha}{k}\right)^2\right)}$$

٢) إن الدالة المعطاة محققة لشروط ديركليه على المجال المذكور و هي فضلاً عن ذلك دالة زوجية :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{cosnx\,dx}_{dv} = \frac{4}{n^2}(-1)^n \quad \text{(تجزئة مرتين)}$$

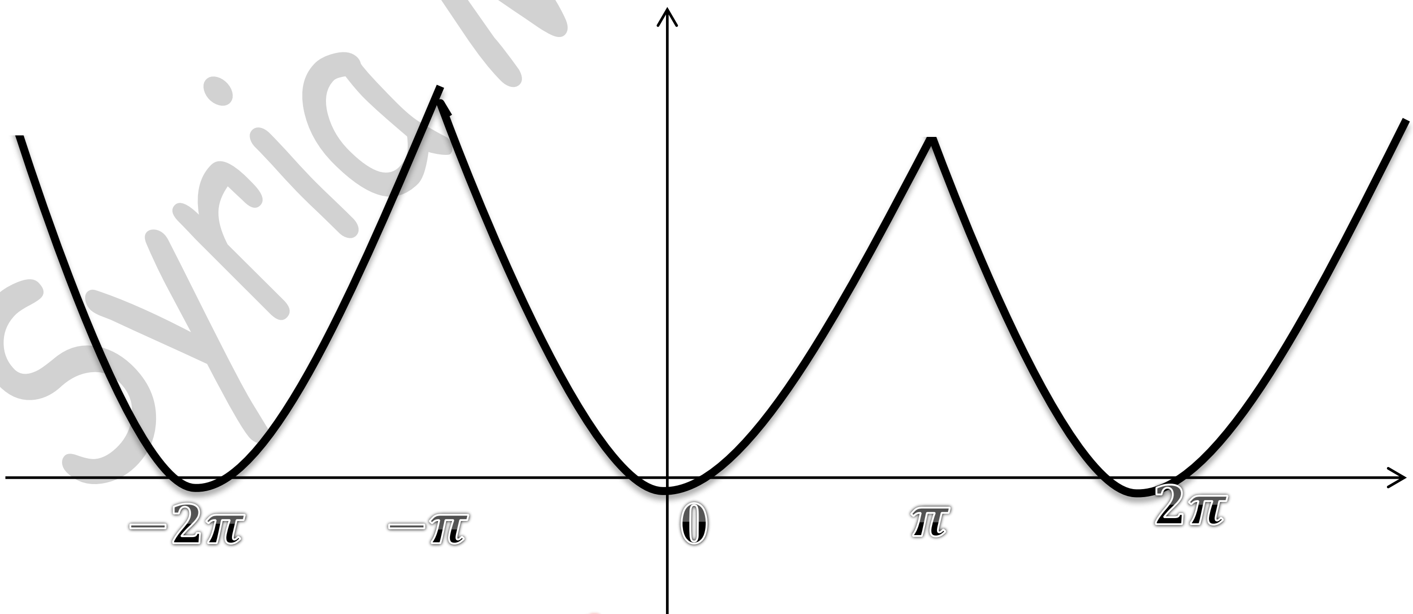
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2 sinnx}_{\text{تابع فردي}}\,dx = 0$$

بالتعويض في متسلسلة فورييه :

$$f(x) = x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}cosnx$$

و ذلك عندما $-\pi < x < \pi$ أما عند الأطراف : $\frac{1}{2}\big(f(-\pi+0)+f(\pi-0)\big) = \pi^2$

و بيان دالة المجموع على R :



انتهى حل الدورة الفصلية الاولى ٢٠١٧ ☺

أسئلة الدورة الفصلية الثانية (٢٠١٧) :

السؤال الأول برهن ما يلي:

١- الشرط اللازم لتقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بانتظام من التابع $f(x)$ على مجال ما I هو أن يسعى حدها العام إلى التابع الصفري بشكل منتظم على I

٢- برهن أنه إذا كان $p\,,q$ عددين موجبين فإن:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

السؤال الثاني :

١- ادرس التقارب (المنتظم أم غير المنتظم) لمتتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$ المعرفة على المجال $I=[0,1]$

٢- أوجد قيمة الجداء التالي :

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$$

السؤال الثالث :

١- أثبت قاعدة ليجاندر $\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)$

٢- انطلاقاً من المساواة : $a>0$, $\int_0^{\infty}\frac{dx}{a+x^2}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{a}}\ldots\ldots(1)$ احسب قيمة التكامل $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}}$ حيث a>0

٣- احسب التكامل $0<m,n\in\mathbb{Z}$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\ d\theta$ حيث n عدد صحيح موجب .

السؤال الرابع :انشر في متسلسلة فوربيه التابع $f(x)=x^2$ على المجال $]-\pi,\pi[$ مع رسم بيان دالة المجموع للمتسلسلة على $\mathbb{R}$ ثم احسب المجموع $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

انتهت الأسئلة

حل أسئلة الدورة الفصلية الأولى (٢٠١٦-٢٠١٧) :

السؤال الأول

١- الشرط اللازم لتقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بانتظام من التابع $f(x)$ على مجال ما I هو أن يسعى حدها العام إلى التابع الصفري بشكل منتظم على I

الحل : لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I أي متتالية مجاميعها الجزئية $s_n(x)$ متقاربة بانتظام على I ومنه:

أياً كان $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون:

$|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ لأجل $m > n > N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I

نأخذ $n > N_0 + 1 \Leftarrow n > n - 1 > N_0$

ومن ثم نأخذ بدل m (n) وبدل n $(n-1)$

$|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ محققة:

نجد أن $|f_n(x)| < \varepsilon$ لأجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0 \neq 0$

بحيث يكون $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$ عندما $n > N_0$

أي أن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع متقاربة بانتظام من التابع الصفري $f(x) = 0$.

2-برهن أنه إذا كان $p\,,q$ عددين موجبين فإن:

$$\boldsymbol{B(p,q) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}}$$

الإثبات:

نأخذ

$$\Gamma(p) = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}.x^{2p-1}\,dx$$

$$\Gamma(q) = 2\int_0^{\infty} e^{-y^2}.y^{2q-1}\,dx$$

بضرب التكاملين طرفاً لطرف

$$\Gamma(p).\Gamma(q) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}.x^{2p-1}.y^{2q-1}\,dxdy$$

ولحساب هذا التكامل المضاعف (الثنائي) ننتقل إلى الإحداثيات القطبية:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\sin\theta$$

$$dx.dy = r\,dr\,d\theta$$

لأنه بحسب اليعقوبي:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta$$

$$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

والتكامل في هذه الحالة يأخذ الشكل التالي:

$$\iint_D f(x,y)ds = \iint f(r\cos\theta\ , r\sin\theta)r\,.dr\,d\theta$$

بالعودة لإثبات المبرهنة:

حدود التكامل:

$$0 < r < \infty$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

وهي مساحة الربع الأول

بالتعويض تجميع المتحولات (كونها مستقلين عن بعضهما)

$$\Gamma(p).\Gamma(q) = 2\int_0^\infty (e^{-r^2}.r^{2p-1}.r^{2q-1}.r\,dr).2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2p-1}\theta\,.\sin^{2q-1}\theta\ \ d\theta)$$

$$\Gamma(p).\Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-r^2}.r^{2(p+q)-1}\,dr\,.2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta\,.\sin^{2q-1}\theta\ \ d\theta$$

$$\Longrightarrow \Gamma(p).\Gamma(q) = \Gamma(p+q).B(p,q)$$

لأن $\Gamma(p)$ يحوي x^{2p-1} و هنا لدينا $r^{2(p+q)-1}$ وبالتالي هي $\Gamma(p+q)$

$$\boxed{\Longrightarrow B(p,q) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}}$$

السؤال الثاني

1- ادرس التقارب (المنتظم أم غير المنتظم) لمتتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ المعرفة على المجال $I = [0,1]$

الحل :

بداية نلاحظ أن :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

كما أننا نلاحظ أن التوابع $f_n(x)$ تعطى تفصيلاً بالشكل :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ \dfrac{1}{2n} & : x = \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{1+n^2} & : x = 1 \end{cases}$$

و لنثبت أن $f_n(x) \le \frac{1}{2n}$ عندها يكون $sup f_n(x) = \frac{1}{2n}$

و لإثبات ذلك نكتب :

$$0 \le (1-n)^2 = 1 - 2n + n^2 \Longrightarrow 2n \le 1 + n^2$$

نقلب طرفي المتراجحة :

$$0 \le \frac{1}{1+n^2} \le \frac{1}{2n}$$

فنلاحظ أن $f(x) \le \frac{1}{2n}$ لكل x من I و بالتالي :

$$\sup_{x\in I} f_n(x) = \frac{1}{2n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

فالتقارب منتظم ☺

٢- أوجد قيمة الجداء التالي :

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$$

الحل : نشكل متتالية الجداءات الجزئية $\{p_n\}$

$$p_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$

$$=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

$$p_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{8}\cdots\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{13}{7}\cdots\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{2}{3}$$

أي أن قيمة الجداء هي $\frac{2}{3}$ و الجداء متقارب

السؤال الثالث

١- أثبت قاعدة ليجاندر $\boldsymbol{\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)}$

الحل : لدينا

$$B(p,p)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}\,dx=\int_0^1(x-x^2)^{p-1}\,dx$$

نقوم بالإتمام إلى مربع كامل حيث

$$(x-x^2)=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$$

بالعودة للتكامل السابق و التعويض :

$$B(p,p)=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}dx$$

و لما كان التابع $f(x)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$ يرسم قطعاً مكافئاً فإنه يكون متناظراً بالنسبة لمحور تناظره $x=\frac{1}{2}$

$$B(p,p)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}dx$$

نفرض $\frac{1}{4}t=\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$

أو:

$$\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

نفاضل الطرفين:

$$\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}dt=-dx$$

$$\Rightarrow dx=-\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

بالتعويض بالتكامل:

$$\mathrm{B(p,p)}=-2\int_1^0\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\mathrm{t}\right)\right]^{\mathrm{p}-1}.\left(-\frac{1}{4}\mathrm{t}^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{dt}$$

$$=-2\int_1^0\frac{1}{4}\mathrm{t}^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\mathrm{t}\right]^{\mathrm{p}-1}\mathrm{dt}\quad=-2\int_1^0\frac{1}{4}\mathrm{t}^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}(1-\mathrm{t})\right]^{\mathrm{p}-1}\mathrm{dt}$$

$$=-\frac{2.1}{4}\int_1^0\mathrm{t}^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}(1-\mathrm{t})\right]^{\mathrm{p}-1}\mathrm{dt}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_1^0\mathrm{t}^{-\frac{1}{2}}.(1-\mathrm{t})^{\mathrm{p}-1}.\frac{1}{4^{\mathrm{p}-1}}\mathrm{dt}$$

$$=-\frac{1}{2}.\frac{1}{4^{\mathrm{p}-1}}\int_1^0\mathrm{t}^{-\frac{1}{2}}(1-\mathrm{t})^{\mathrm{p}-1}\mathrm{dt}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{2p-2}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{p-1}\, dt$$

$$= \frac{1}{2^{2p-1}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{p-1}\, dt$$

$$\Longrightarrow B(p,p) = \frac{1}{2^{2p-1}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{p-1}\, dt$$

العلاقة بين تكاملي أولر حيث: $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

هنا:

$$B(p,p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(p+p)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}} B\left(-\frac{1}{2} + 1\,, p - 1 + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2^{p-1}} B\left(\frac{1}{2}, p\right)$$

ومنه:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(p)\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2p-1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)\Gamma(2p)$$

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2p-1}} \Gamma(p)\Gamma(2p)$$

حيث $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

ومنه:

$$\boxed{\Gamma(p)\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \Gamma(2p)}$$

٢- انطلاقاً من المساواة : $a > 0$, $\int_0^\infty \frac{dx}{a+x^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{a}} \ldots\ldots(1)$ احسب قيمة التكامل $\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}}$ حيث $a>0$

الحل:

نشتق طرفي العلاقة (١) بالنسبة للوسيط a :

$$\int_0^\infty \frac{-1}{(a+x^2)^2}dx = -\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{a\sqrt{a}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty \frac{1}{(a+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{a\sqrt{a}}$$

نشتق مرة أخرى :

$$\int_0^\infty \frac{-1.2}{(a+x^2)^3}dx = -\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{a^2\sqrt{a}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty \frac{1.2}{(a+x^2)^3}dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{a^2\sqrt{a}}$$

و نكمل حتى نشتق n مرة فنجد أن :

$$\int_0^\infty \frac{n!}{(a+x^2)^{n+1}}dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2^n}\frac{1}{a^n\sqrt{a}}$$

نقسم الطرفين على $n!$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2^n n!}\frac{1}{a^n\sqrt{a}}$$

لكن :

$$2^n.n! = \underbrace{2.2.2\ \dots .2}_{n\ \text{مرة}}\ 1.2.3.4\ \dots n = (1.2)(2.2)(3.2)\dots(n.2) = 2.4.6\dots 2n$$
$$= (2n)!!$$

إذاً يكون :

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(2n)!!}\frac{1}{a^n\sqrt{a}} = \frac{\pi}{2(2n)!!\,a^n\sqrt{a}}}$$

٣- احسب التكامل $0 < m,n \in \mathbb{Z}$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta\ d\theta$ حيث n عدد صحيح موجب .

باستخدام تغيير المتحول:

$$\sin^2\theta = t \Leftarrow \sin\theta = t^{\frac{1}{2}}$$
$$\cos\theta\ d\theta = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$
$$\cos\theta = \sqrt{1-t} = (1-t)^{-\frac{1}{2}}$$

بتغيير حدود التكامل

$$\theta = 0 \Rightarrow t = 0$$
$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$
$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{2}}\right)^{2n}.t^{-\frac{1}{2}}.\frac{1}{\cos\theta}\ d\theta$$
$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 t^n.t^{-\frac{1}{2}}.\frac{1}{\cos\theta}\ d\theta$$
$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}}.(1-t)^{-\frac{1}{2}}\ d\theta$$
$$\Rightarrow J = \frac{1}{2}B\left(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

و لكن كيف عرفنا أن المساقط هي $1/2$, $n+1/2$ في

$$B\left(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

لدينا من القوى :

$$(1-t)^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad t^{n-\frac{1}{2}}$$

و بالمقارنة مع الشكل العام للتكامل البتاوي:

$$p-1=n-\frac{1}{2} \Rightarrow p=n-\frac{1}{2}+1=n+\frac{1}{2}$$

$$q-1=-\frac{1}{2} \Rightarrow q=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

لذلك:

$$J=\frac{1}{2}B\left(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow J=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\dots\frac{1}{2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{n!}$$

حيث:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

و ذلك بالاستفادة من العلاقة:

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$$

أي طرحنا واحد من الـ $(p+1)$

بالعودة للتمرين: نوحد المقامات مع ملاحظة أن $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi$

$$J=\frac{1}{2}\frac{(2n-1)(2n-3)\dots3.1.\pi}{2^n.n!}$$

$$=\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)(2n-3)\dots3.1}{2^n.n!}$$

لحساب $2^n.n!$:

$$2^n = \underbrace{2.2.2.2\ldots 2}_{\text{مرة}}$$

$$n! = 1.2.3\ldots(n-1).n$$

$$\Rightarrow 2^n.n! = (2.2.2.2\ldots 2)(1.2.3\ldots.n) = (2.1)(2.2)(2.3)\ldots(2n) = 2.4.6\ldots(2n-2)(2n) = (2n)!!$$

و لدينا :

$$(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1 = (2n-1)!!$$

ومنه:

$$J = \frac{\pi}{2}.\frac{(2n-1)!!}{(2n)!}$$

السؤال الرابع

إن الدالة المعطاة محققة لشروط ديركليه على المجال المذكور و هي فضلاً عن ذلك دالة زوجية :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{cosnx\,dx}_{dv} = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

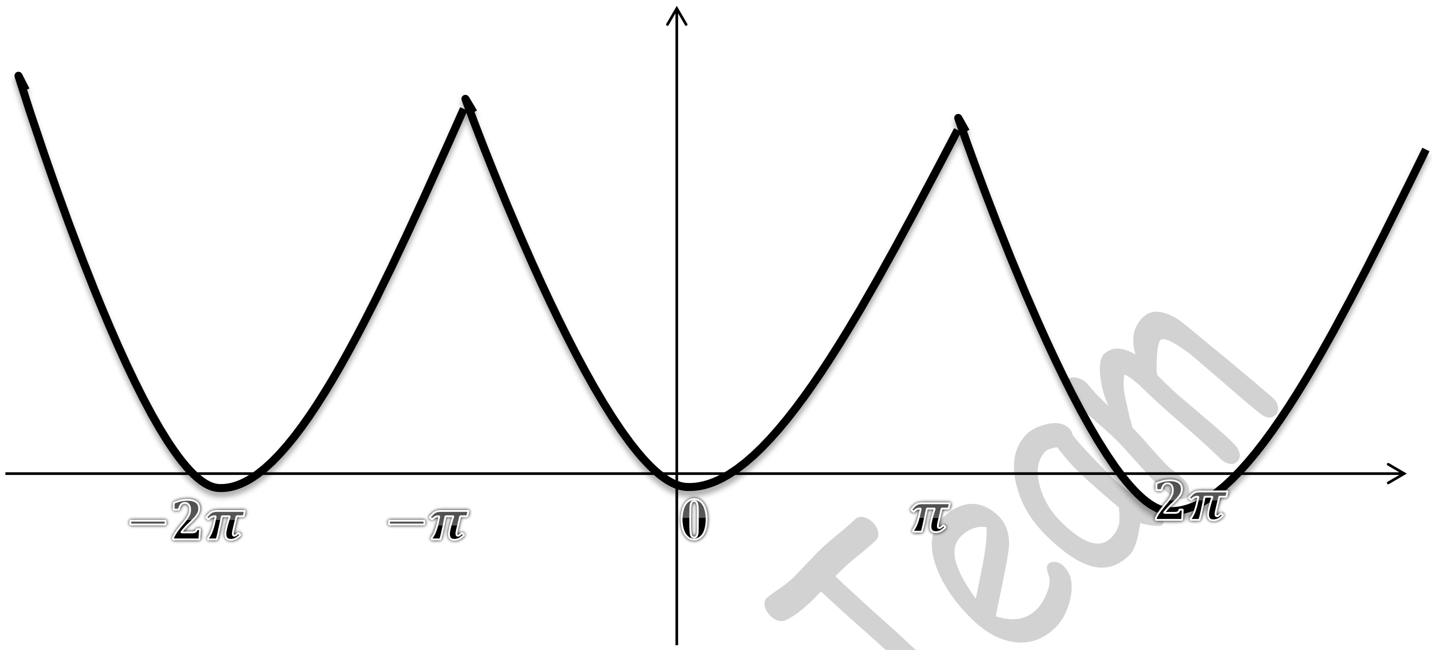
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2 sinnx}_{\text{تابع فردي}}\,dx = 0$$

بالتعويض في متسلسلة فورييه :

$$f(x) = x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}cosnx$$

و ذلك عندما $-\pi < x < \pi$ أما عند الأطراف : $\frac{1}{2}\big(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\big) = \pi^2$

و بيان دالة المجموع على R :



بفرض $x = 0$ في الطرفين و عزلنا المتسلسلة لنتج لدينا :

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} cosnx$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

انتهى حل الدورة الفصلية الثانية ٢٠١٧ ☺

أسئلة الدورة الفصلية الإضافية (٢٠١٧) :

السؤال الأول (٢٠) :

برهن إحدى المبرهنتين التاليتين :

١- لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على المجال I و بفرض إنها متقاربة بانتظام على I من تابع النهاية $f(x)$، عندئذٍ إذا كانت حدود المتتالية توابع مستمرة على I فإن التابع $f(x)$ يكون مستمراً على I .

٢- لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ مستمرة ومعرفة على المجال المغلق $I = [a, b]$ حيث $-\infty < a < b < +\infty$ وبفرض أن هذه المتتالية متقاربة بانتظام على I من تابع النهاية $f(x)$ عندئذٍ التابع $f(x)$ قابل للمكاملة على I ويحقق العلاقة:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

السؤال الثاني (٣٠):

١- ادرس التقارب (المنتظم أو غير المنتظم) لمتتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x) = x^n$ المعرفة على المجال $[p, q]$ حيث $0 < p < q < 1$

٢- ادرس تقارب الجداء التالي : $|x| < 1$: $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + x^{2^n}\right)$ و احسب قيمته في حال تقاربه.

٣- أوجد منطقة تقارب المتسلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n(5^n + 1)}$$

السؤال الثالث(٣٠) :

١- أثبت قاعدة ليجاندر $\Gamma(p)\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}.\Gamma(2p)$

٢- أوجد قيمة التكامل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx$ ثم وجد قيمة التكامل من أجل $m = 4 , n = 6$

٣- ادرس تقارب التكامل

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}dx \quad : a > 0$$

السؤال الرابع (٢٠):

انشر التابع $f(x) = x^2$ في متسلسلة فورييه على المجال $]-\pi, \pi[$ مع رسم بيان دالة المجموع للمتسلسلة على R .

انتهت الأسئلة

حل أسئلة الدورة الفصلية الأولى (٢٠١٦-٢٠١٧) :

السؤال الأول

١- لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على المجال I و بفرض إنها متقاربة بانتظام على I من تابع النهاية $f(x)$، عندئذٍ إذا كانت حدود المتتالية توابع مستمرة على I فإن التابع $f(x)$ يكون مستمراً على I

الحل :

ليكن $x_0 \in I$ وليكن $\varepsilon > 0$ بما أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام فإنه يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ عندما $n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I

$f_n(x)$ حدودها توابع مستمرة ومنه من أجل $x_0 \in I$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون $n \geq N_0$ ويحقق:

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}: \ |x - x_0| < \delta \ , \qquad n \geq N_0$$

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0) \qquad : \quad x_0 \in I$$

أي من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون $|x - x_0| < \delta$

فإن:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|$$
$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

أي أن الدالة $f(x)$ مستمرة في x_0 وبالتالي $x_0 \in I$ أي $f(x)$ مستمرة على I.

٢- لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ مستمرة ومعرفة على المجال المغلق $I = [a, b]$ حيث $-\infty < a < b < +\infty$ وبفرض أن هذه المتتالية متقاربة بانتظام على I من تابع النهاية $f(x)$ عندئذٍ التابع $f(x)$ قابل للمكاملة على I ويحقق العلاقة:

$$\boldsymbol{lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx}$$

الحل :

بما أن التوابع $f_n(x)$ في المتتالية مستمرة على $[a,b]$ و المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ يكون التابع $f(x)$ مستمراً و بالتالي قابل للمكاملة على $[a,b]$ و لدينا :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

نأخذ $\varepsilon > 0$ و بالتالي $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$

يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون:

$$\left| \underbrace{\int_a^b f_n(x)dx}_{\text{الحد العام}} - \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{النهاية}} \right| = \left| \int_a^b [f_n(x)dx - f(x)]dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$$

حيث $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ تكون المتتالية متقاربة بانتظام

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

السؤال الثاني

١- ادرس التقارب (المنتظم أو غير المنتظم) لمتتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x) = x^n$ المعرفة على المجال $[p,q]$ حيث $0 < p < q < 1$

الحل :

$$\forall\, x \in [p,q] \Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

إن $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ بسبب ما يلي :

(لأنها متتالية هندسية أساسها أصغر تماماً من الواحد بالقيمة المطلقة)

ومنه المتتالية متقاربة نقطياً على هذا المجال ، وعلى أي جزء من هذا المجال هي متقاربة نقطياً أيضاً.

لنثبت أن المتتالية متقاربة بانتظام: نلجأ للتعريف:

من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $N > \max\left(1, \frac{\ln \varepsilon}{\ln q}\right)$ بحيث يكون:

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < \varepsilon$$

و بقي لكي أن تتقارب البحث عن n المحققة للمتباينة: $x^n < \varepsilon$

$$x^n < \varepsilon \Rightarrow \ln x^n < \ln \varepsilon$$

$$n \ln x < \ln \varepsilon \Rightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$$

ولكن بما أن $\ln x$ مقدار سالب(لأن x محصور بين الصفر والواحد) نقلب إشارة المتراجحة فيصبح:

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln q} \quad ; \quad x \in [p, q]$$

يجب أن لا يوجد علاقة بين x و n ونريد تصغير الكسر لذلك نكبر المقام ويكون ذلك بأخذ $x = q$

يوجد كل $\varepsilon > 0$ عدد N يحقق أنه عندما $n > N = \max\left(1, \frac{\ln \varepsilon}{\ln q}\right)$ فإن

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < \varepsilon$$

المتتالية متقاربة بانتظام.

٢- ادرس تقارب الجداء التالي : $|x| < 1$: $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + x^{2^n}\right)$ و احسب قيمته في حال تقاربه.

الحل :

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + x^{2^n}\right) \ : |x| < 1$$

بداية لنشكل متتالية المجاميع الجزئية و التي حدها العام :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + x^{2^k}\right) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \ldots \left(1 + x^{2^n}\right)$$

و الآن و بهدف تبسيط الحد العام من أجل التمكن من حساب نهايته بسهولة لنضرب الطرفين بالمقدار $(1 - x) \neq 0$

$$(1-x)p_n = \underbrace{(1-x)(1+x)}_{(1-x^2)}(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots(1+x^{2^n})$$

$$(1-x)p_n = \underbrace{(1-x^2)(1+x^2)}_{(1-x^4)}(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})$$

$$(1-x)p_n = (1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)\dots(1+x^{2^n})$$

$$= (1-x^{2^n})(1+x^{2^n}) = 1^2 - \left(x^{2^n}\right)^2 = 1 - x^{2.2^n} = 1 - x^{2^{n+1}}$$

$$\Longrightarrow p_n = \frac{\left(1-x^{2^{n+1}}\right)}{1-x}$$

بأخذ نهاية p_n و بملاحظة أن $\lim_{n\to\infty} x^{2^{n+1}} = 0$ لأن $|x| < 1$ نستنتج أن :

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{1-x}$$

أي أن الجداء متقارب وقيمته: $\boxed{p = \frac{1}{1-x}}$

٣- أوجد منطقة تقارب المتسلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n(5^n+1)}$$

الحل :

متسلسلة قوى مركزها $a = -2$

بفرض $y = x + 2$ تأخذ هذه المتسلسلة الشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n(5^n+1)} \qquad (*)$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(5^n+1)}\cdot\frac{(n+1)(5^{n+1}+1)}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}.\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+1}{5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}.\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left(5+\frac{1}{5^n}\right)}{5^n\left(1+\frac{1}{5^n}\right)}$$

$$= 1 \times 5 = 5$$

فمجال التقارب للمتسلسلة $I =]-5,5[$

ولكن عندما $y = 5$ يتم الحصول من المتسلسلة (*) على المتسلسلة المتباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n(5^n+1)}$$

وعندما $y = -5$ يتم الحصول من المتسلسلة (*) على المتسلسلة المتقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,5^n}{n(5^n+1)}$$

إذاً فمنطقة تقارب المتسلسلة (*) هي $[-5,5[$ وهذا يعني أن المتسلسلة(*) لا تتقارب إلا من أجل جميع قيم y التي تحقق الشرط:

$-5 \le y < 5$ ومنه فالمتسلسلة الأصلية لا تتقارب إلا من اجل قيم x التي تحقق الشرط:

$$-5 < x + 2 < 5$$

أي

$$-5 - 2 \le x < 5 - 2$$

$$-7 \le x < 3$$

ومنه فمنطقة تقارب المتسلسلة الأصلية هي $[-7,3[$

السؤال الثالث

١- أثبت قاعدة ليجاندر $\boldsymbol{\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)}$

الحل : لدينا

$$B(p,p) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}\,dx = \int_0^1 (x-x^2)^{p-1}\,dx$$

نقوم بالإتمام إلى مربع كامل حيث

$$(x-x^2)=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$$

بالعودة للتكامل السابق و التعويض :

$$B(p,p)=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}dx$$

و لما كان التابع $f(x)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$ يرسم قطعاً مكافئاً فإنه يكون متناظراً بالنسبة لمحور تناظره $x=\frac{1}{2}$

$$B(p,p)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}dx$$

نفرض $\frac{1}{4}t=\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$

أو:

$$\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

نفاضل الطرفين:

$$\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}dt=-dx$$

$$\Longrightarrow dx=-\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

بالتعويض بالتكامل:

$$B(p,p)=-2\int_1^0\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}t\right)\right]^{p-1}.\left(-\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$=-2\int_1^0\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t\right]^{p-1}dt\quad=-2\int_1^0\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}(1-t)\right]^{p-1}dt$$

$$=-\frac{2.1}{4}\int_1^0 t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}(1-t)\right]^{p-1}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{1}^{0} t^{-\frac{1}{2}}.(1-t)^{p-1}.\frac{1}{4^{p-1}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}.\frac{1}{4^{p-1}}\int_{1}^{0} t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2^{2p-2}}\int_{0}^{1} t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2^{2p-1}}\int_{0}^{1} t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$\Longrightarrow B(p,p) = \frac{1}{2^{2p-1}}\int_{0}^{1} t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

العلاقة بين تكاملي أولر حيث: $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

هنا:

$$B(p,p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(p+p)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}}B\left(-\frac{1}{2}+1\,,p-1+1\right)$$

$$= \frac{1}{2^{p-1}}B\left(\frac{1}{2},p\right)$$

ومنه:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2p-1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)\Gamma(2p)$$

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2p-1}}\Gamma(p)\Gamma(2p)$$

حيث $\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

ومنه:

$$\boxed{\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)}$$

٢- أوجد قيمة التكامل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx$ ثم وجد قيمة التكامل من أجل $m=4\,,n=6$

الحل :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x.\cos^n x\ dx \quad ; \quad m,n\in\mathbb{N}$$

حسب الشكل المثلثي للتكامل البتاوي:

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta.\cos^{2q-1}\theta\ d\theta$$

$$m=2p-1\Longrightarrow 2p=m+1\Longrightarrow p=\frac{m+1}{2}$$

$$n=2q-1\Longrightarrow 2q=n+1\Longrightarrow q=\frac{n+1}{2}$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x.\cos^n x\ dx$$

$$=\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right)$$

و لنأخذ حالة خاصة عندما $m=4\,,n=6$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x.\cos^6 x\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{12}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{5.4.3.2.1}\cdot\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

حيث:

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Gamma(6) = 5!$$

وبالتالي بالاختصار نجد:

$$\mathrm{I} = \frac{3\pi}{2^9} = \frac{3\pi}{512}$$

٣ـ ادرس تقارب التكامل

$$\boldsymbol{I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}dx \quad : a > 0}$$

الحل :

في الحقيقة إن وجود القيمة المطلقة في التابع المكامل و كون مجال المكاملة هو $]-\infty,+\infty[$ فلا بد أن نتخلص من القيمة المطلقة و ذلك كما يلي :

لما كان : $|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$

يمكن تقسيم مجال المكاملة كما يلي :

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}dx=\int_{-\infty}^{0} e^{ax}dx+\int_{0}^{+\infty} e^{-ax}dx=I_1+I_2$$

و لنحسب كل منهما على حدى أيضاً :

$$I_1=\int_{-\infty}^{0} e^{ax}dx=\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{0} e^{ax}dx=\frac{1}{a}\lim_{A\to-\infty}[e^{ax}]_A^0=\frac{1}{a}[1-e^{aA}]=\frac{1}{a}$$

$$I_2=\int_{0}^{+\infty} e^{-ax}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{0}^{A} e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}\lim_{A\to+\infty}[e^{-ax}]_0^A=$$

$$=-\frac{1}{a}\lim_{A\to+\infty}[e^{-aA}-1]_0^A=\frac{1}{a}$$

وبالتالي :

$$I=I_1+I_2=\frac{2}{a}$$

فالتكامل المعطى متقارب و قيمته $\frac{2}{a}$.

السؤال الرابع

إن الدالة المعطاة محققة لشروط ديركليه على المجال المذكور و هي فضلاً عن ذلك دالة زوجية :

$$\boldsymbol{a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx=\frac{2\pi^2}{3}}$$

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{cosnx\,dx}_{dv}=\frac{4}{n^2}(-1)^n}$$

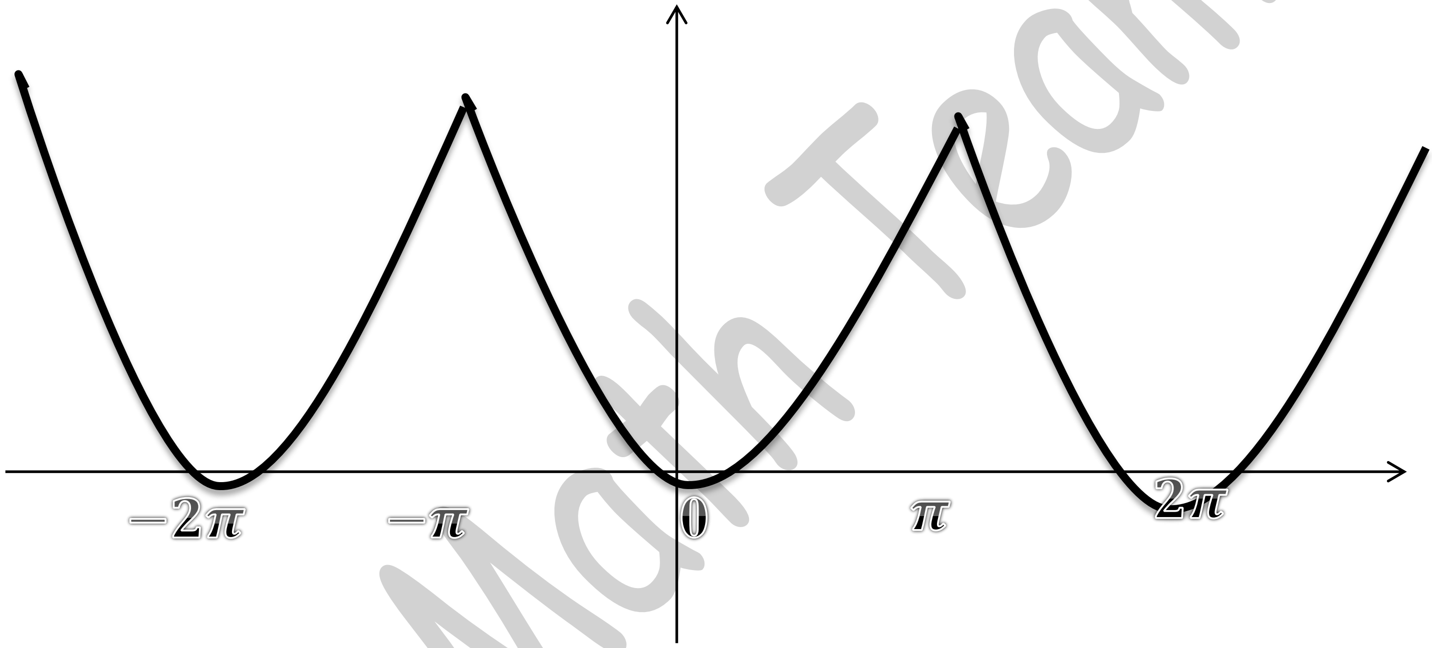
$$\boldsymbol{b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2 sinnx}_{\text{تابع فردي}}\,dx=0}$$

بالتعويض في متسلسلة فورييه :

$$f(x) = x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} cosnx$$

و ذلك عندما $-\pi < x < \pi$ أما عند الأطراف : $\frac{1}{2}\big(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\big) = \pi^2$

و بيان دالة المجموع على R :



بفرض $x = 0$ في الطرفين و عزلنا المتسلسلة لنتج لدينا :

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} cosnx$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

انتهى حل الدورة الفصلية الإضافية ٢٠١٧ ☺

أسئلة الدورة الفصلية الاولى (٢٠١٦) :

السؤال الأول : برهن إحدى المبرهنتين الآتيتين:

١- الشرط اللازم لتقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بانتظام من التابع $f(x)$ على مجال ما I هو أن يسعى حدها العام إلى التابع الصفري بشكل منتظم على I .

٢- لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على المجال I و بفرض أنها متقاربة بانتظام على I من تابع النهاية $f(x)$ عندئذٍ إذا كانت حدود هذه المتتالية توابع مستمرة على I فإن التابع $f(x)$ يكون مستمراً على I.

السؤال الثاني :

١- ادرس تقارب الجداء التالي : $|x| < 1$: $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + x^{2^n}\right)$ و احسب قيمته في حال تقاربه.

٢- ادرس التقارب (المنتظم أو غير المنتظم) لمتتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ المعرفة على المجال $I = [0,1]$.

٣- ادرس التقارب (المنتظم أو غير المنتظم) على المجال $I =]0,1[$ للمتسلسلة التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$$

السؤال الثالث :

١- ادرس قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx$ ثم أوجد قيمة التكامل من أجل $m = 4 , n = 6$.

٢- أثبت قاعدة ليجاندر $\Gamma(p)\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)$

٣- ادرس تقارب التكامل $I = \int_{0^+}^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ حيث s>0

السؤال الرابع :

١- احسب قيمة التكامل $I = \int_0^1 a(lnx)^n \, dx$ حيث $a \neq -1$ و n عدد طبيعي .

٢- أثبت أن $\int_0^{\infty} e^{-x^2} cos2axdx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}$

انتهت الاسئلة

حل أسئلة الدورة الفصلية الاولى (٢٠١٦) :

السؤال الأول : برهن إحدى المبرهنتين الآتيتين:

١- الشرط اللازم لتقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بانتظام من التابع $f(x)$ على مجال ما I هو أن يسعى حدها العام إلى التابع الصفري بشكل منتظم على I

الحل : لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I أي متتالية مجاميعها الجزئية $s_n(x)$ متقاربة بانتظام على I ومنه:

أياً كان $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون:

$|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ لأجل $m > n > N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I

نأخذ $n > N_0 + 1 \Leftarrow n > n - 1 > N_0$

ومن ثم نأخذ بدل m ‏(n) وبدل n ‏$(n-1)$

$|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ محققة:

نجد أن $|f_n(x)| < \varepsilon$ لأجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0 \neq 0$

بحيث يكون $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$ عندما $n > N_0$

أي أن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع متقاربة بانتظام من التابع الصفري $f(x) = 0$.

٢- لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على المجال I و بفرض أنها متقاربة بانتظام على I من تابع النهاية $f(x)$ عندئذٍ إذا كانت حدود هذه المتتالية توابع مستمرة على I فإن التابع $f(x)$ يكون مستمراً على I.

الحل : ليكن $x_0 \in I$ وليكن $\varepsilon > 0$ بما أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام فإنه يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ عندما $n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I

$f_n(x)$ حدودها توابع مستمرة ومنه من أجل $x_0 \in I$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون $n \geq N_0$ ويحقق:

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}: \ |x - x_0| < \delta \ , \qquad n \geq N_0$$

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0) \qquad : \quad x_0 \in I$$

أي من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون $|x - x_0| < \delta$

فإن:

$$|f(x)-f(x_0)| = |f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f(x_0)|$$
$$\le |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

أي أن الدالة $f(x)$ مستمرة في x_0 و أن : $x_0 \in I$ أي $f(x)$ مستمرة على I.

السؤال الثاني :

١- ادرس تقارب الجداء التالي : $|x|<1$: $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)$ و احسب قيمته في حال تقاربه.

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right) \ : |x|<1$$

بداية لنشكل متتالية المجاميع الجزئية و التي حدها العام :

$$p_n=\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots\left(1+x^{2^n}\right)$$

و الآن و بهدف تبسيط الحد العام من أجل التمكن من حساب نهايته بسهولة لنضرب الطرفين بالمقدار $(1-x)\neq 0$

$$(1-x)p_n=\underbrace{(1-x)(1+x)}_{(1-x^2)}(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots\left(1+x^{2^n}\right)$$

$$(1-x)p_n=\underbrace{(1-x^2)(1+x^2)}_{(1-x^4)}(1+x^4)\dots\left(1+x^{2^n}\right)$$

$$(1-x)p_n=(1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)\dots\left(1+x^{2^n}\right)$$
$$=\left(1-x^{2^n}\right)\left(1+x^{2^n}\right)=1^2-\left(x^{2^n}\right)^2=1-x^{2.2^n}=1-x^{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow\ p_n=\frac{\left(1-x^{2^{n+1}}\right)}{1-x}$$

بأخذ نهاية p_n و بملاحظة أن $\lim_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$ لأن $|x|<1$ نستنتج أن :

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{1-x}$$

أي أن الجداء متقارب وقيمته: $\boxed{p = \frac{1}{1-x}}$

٢- ادرس التقارب (المنتظم أو غير المنتظم) لمتتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ المعرفة على المجال $I = [0,1]$

الحل:

بداية نلاحظ أن :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

كما أننا نلاحظ أن التوابع $f_n(x)$ تعطى تفصيلاً بالشكل :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ \dfrac{1}{2n} & : x = \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{1+n^2} & : x = 1 \end{cases}$$

و لنثبت أن $f_n(x) \le \frac{1}{2n}$ عندها يكون $\sup f_n(x) = \frac{1}{2n}$

و لإثبات ذلك نكتب :

$$0 \le (1-n)^2 = 1 - 2n + n^2 \Longrightarrow 2n \le 1 + n^2$$

نقلب طرفي المتراجحة :

$$0 \le \frac{1}{1+n^2} \le \frac{1}{2n}$$

فنلاحظ أن $f(x) \le \frac{1}{2n}$ لكل x من I و بالتالي :

$$\sup_{x\in I} f_n(x) = \frac{1}{2n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

فالتقارب منتظم ☺

٣- ادرس التقارب (المنتظم أو غير المنتظم) على المجال $I =]0,1[$ للمتسلسلة التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$$

الحل : إن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n.\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x).h_n(x)$$

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ متسلسلة هندسة و متتالية مجاميعها الجزئية:

$$S_n(x)=(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\cdots+(-x)^n \;=\frac{(-x)-(-x)^{n+1}}{1+x}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{-x-(-x)^{n+1}}{1+x}=\frac{-x}{1+x}=s(x)$$

حيث نهاية $(-x)^{n+1}$ عندما n تسعى للانهاية هي الصفر.

$$\Rightarrow s(x)=\frac{-x}{1+x} \quad \text{و} \quad x\in]0,1[$$

$$|S_n(x)|=\left|\frac{-x-(-x)^{n+1}}{1+x}\right| \underset{\text{بحذف المقام يكبر المقدار}}{\leq} \left|-x-(-x)^{n+1}\right| \underset{|a+b|\leq|a|+|b|}{\leq} |x|+|x|^{n+1}<2$$

المتسلسلة محدودة على $]0,1[$

المتتالية $\{h_n(x)\}$ حيث $h_n(x)=\frac{1}{n}$ متناقصة ومتقاربة بانتظام من التابع الصفري على I.

وبالتالي المتسلسلة المعطاة متقاربة بانتظام حسب اختبار **ديريكليه**

السؤال الثالث :

١- ادرس قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$ ثم أوجد قيمة التكامل من أجل $m=4\,,n=6$

الحل :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x.\cos^n x\;dx \quad ; \quad m,n\in\mathbb{N}$$

حسب الشكل المثلثي للتكامل البتاوي:

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\,.\cos^{2q-1}\theta\ d\theta$$

$$m=2p-1\Longrightarrow 2p=m+1\Longrightarrow p=\frac{m+1}{2}$$

$$n=2q-1\Longrightarrow 2q=n+1\Longrightarrow q=\frac{n+1}{2}$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,.\cos^n x\ dx$$

$$=\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right)$$

و لنأخذ حالة خاصة عندما $m=4\,,n=6$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,.\cos^6 x\ dx$$

$$=\frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{12}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{5.4.3.2.1}\cdot\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

حيث:

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Gamma(6)=5!$$

وبالتالي بالاختصار نجد:

$$I=\frac{3\pi}{2^9}=\frac{3\pi}{512}$$

٢- أثبت قاعدة ليجاندر $\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)$

الحل :

لدينا

$$B(p,p)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}\,dx=\int_0^1 (x-x^2)^{p-1}\,dx$$

نقوم بالإتمام إلى مربع كامل حيث

$$(x-x^2)=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$$

بالعودة للتكامل السابق و التعويض :

$$B(p,p)=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}\,dx$$

و لما كان التابع $f(x)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$ يرسم قطعاً مكافئاً فإنه يكون متناظراً بالنسبة لمحور تناظره $x=\frac{1}{2}$

$$B(p,p)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}\,dx$$

نفرض $\frac{1}{4}t=\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$

أو:

$$\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

نفاضل الطرفين:

$$\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\,dt=-dx$$

$$\Longrightarrow dx=-\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

بالتعويض بالتكامل:

$$B(p,p)=-2\int_1^0\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}t\right)\right]^{p-1}.\left(-\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$=-2\int_1^0\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t\right]^{p-1}dt\quad=-2\int_1^0\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}(1-t)\right]^{p-1}dt$$

$$=-\frac{2.1}{4}\int_1^0 t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}(1-t)\right]^{p-1}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int_1^0 t^{-\frac{1}{2}}.(1-t)^{p-1}.\frac{1}{4^{p-1}}\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}.\frac{1}{4^{p-1}}\int_1^0 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{2^{2p-2}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$=\frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$\Longrightarrow B(p,p)=\frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

العلاقة بين تكاملي أولر حيث: $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

هنا:

$$B(p,p)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(p+p)}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)}=\frac{1}{2^{2p-1}}B\left(-\frac{1}{2}+1\,,p-1+1\right)$$

$$=\frac{1}{2^{p-1}}B\left(\frac{1}{2},p\right)$$

ومنه:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)}=\frac{1}{2^{2p-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{2p-1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)\Gamma(2p)$$

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{2p-1}}\Gamma(p)\Gamma(2p)$$

حيث $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

ومنه:

$$\boxed{\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)}$$

٣- ادرس تقارب التكامل $I=\int_{0^+}^{\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$ حيث $s>0$

الحل :

$$I=\int_{0^+}^{\infty}e^{-x}x^{s-1}dx\qquad : s>0$$

نلاحظ أن x=0 نقطة شاذة لأنه عندما تكون $0<s<1$ سيصبح لدينا $x=0$ لذلك هي نقط شاذة

و أن التكامل المعطى يكتب بالشكل :

$$I=\int_{0^+}^{\infty}e^{-x}x^{s-1}dx=\int_{0+}^{1}e^{-x}x^{s-1}dx+\int_{1}^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$$

إن التكامل $\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ متقارب لأنه لو طبقنا معيار نهاية النسبة للتكامل السابق مع التكامل $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ فنجد :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}x^{s-1}}{1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{s+1}}{e^x}=0$$

و لما كان التكامل $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ متقارب يكون التكامل $\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ متقارباً

بقي لكي يتقارب التكامل المعطى أن ندرس تقارب تكامل $\int_{0+}^1 e^{-x}x^{s-1}dx$ كما يلي :

لنضع $x=\frac{1}{u}$ عندئذٍ $dx=-\frac{du}{u^2}$ كما أن $x=0\Rightarrow u=\infty$ و $x=1\Rightarrow u=1$

$$\int_{0+}^{1} e^{-x}x^{s-1}dx=-\int_{\infty}^{1} e^{-\left(\frac{1}{u}\right)}\left(\frac{1}{u}\right)^{s-1}\frac{du}{u^2}=\int_{1}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{u}\right)}u^{-s-1}du$$

إن التابع المكامل هنا يكتب بالشكل $\frac{1}{e^{\frac{1}{u}}\ u^{s+1}}$ و لنطبق نعيار نهاية النسبة مع التكامل $\int_1^\infty \frac{1}{u^{s+1}}du$ فنجد أن :

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\frac{1}{e^{\frac{1}{u}}\ u^{s+1}}}{\frac{1}{u^{s+1}}}=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{1}{u}}}=1>0$$

و لما كان التكامل $\int_1^\infty \frac{1}{u^{s+1}}du$ متقارباً ((من الشكل $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx : p>1$)) فإن التكامل $\int_1^\infty e^{-\left(\frac{1}{u}\right)}u^{-s-1}du$ متقارب

مما سبق نخلص إلا أن التكامل $I=\int_{0+}^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ متقارب.

السؤال الرابع :

١- احسب قيمة التكامل $I=\int_0^1 x^a(\ln x)^n\,dx$ حيث $a\neq -1$ و n عدد طبيعي .

الحل : لدينا :

$$\int_0^1 x^\alpha dx=\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1=\frac{1}{1+\alpha}$$

نشتق الطرفين بالنسبة لـ α و ذلك حسب قاعدة لايبتنز :

$$\int_0^1 x^{\alpha}(\ln x)dx = -\frac{1}{(1+\alpha)^2}$$

نشتق مرة أخرى :

$$\int_0^1 x^{\alpha}(\ln x)^2 dx = \frac{1.2}{(1+\alpha)^3}$$

و أيضاً مرة ثالثة :

$$\int_0^1 x^{\alpha}(\ln x)^3 dx = -\frac{1.2.3}{(1+\alpha)^4}$$

حتى إذا وصلنا إلى المشتق من المرتبة n نجد :

$$\boxed{\int_0^1 x^{\alpha}(\ln x)^n dx = (-1)^n\frac{1.2.3\ldots n}{(1+\alpha)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(1+\alpha)^{n+1}}}$$

و هو المطلوب.

٢- أثبت أن $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2\alpha x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2}$

الحل :

نشتق التكامل بالنسبة لـ α

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(e^{-x^2}.\cos 2\alpha x\right)dx$$

$$= +\int_0^{\infty} -e^{-x^2}.2x.\sin 2\alpha x \; dx = H$$

نكامل بالتجزئة:

بفرض: $u = \sin 2\alpha x \Longrightarrow du = 2\alpha\cos 2\alpha x \; dx$

$$dv = -2x^{-x^2}\,dx \Longrightarrow v = e^{-x^2}$$

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = [u.v]_0^\infty - \int_0^\infty v\,du$$

$$= \left[e^{-x^2}.\sin 2\alpha x\right]_0^\infty - 2\alpha\int_0^\infty e^{-x^2}.\cos 2\alpha x\ dx$$

ومنه:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = -2\alpha\int_0^\infty e^{-x^2}.\cos 2\alpha x\ dx = -2\alpha I(\alpha)$$

$$\frac{dI}{I} = -2\alpha\,d\alpha$$

$$\Rightarrow \ln I = -\alpha^2 + \ln c \Rightarrow I = c.e^{-\alpha^2}$$

عندما $\alpha = 0 \Leftarrow I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

ومنه حسب $I = c.e^{-\alpha^2}$ نجد أن $c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

ولهذا فإن: $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2}$

انتهى حل الدورة الفصلية الاولى ٢٠١٦ ☺

أسئلة الدورة الفصلية الثانية (٢٠١٦) :

السؤال الأول : برهن المبرهنة التالية : لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع مستمرة و معرفة على مجال مغلق $\mathbf{I} = [a, b]$ حيث $-\infty < a < b < +\infty$ و بفرض أنها متقاربة بانتظام من تابع النهاية $f(x)$ على I عندئذٍ يكون التابع $f(x)$ قابل للمكاملة على I و تحقق العلاقة :

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx$$

السؤال الثاني :

١- أوجد قيمة الجداء التالي :

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$$

٢- ادرس التقارب (المنتظم أو غير المنتظم) لمتتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ المعرفة على المجال $[0,1]$

٣- أوجد منطقة تقارب المتسلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n(5^n+1)}$$

السؤال الثالث :

١- أثبت قاعدة ليجاندر $\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)$

٢- ادرس تقارب التكامل $I = \int_1^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}$

٣- تحسب قيمة التكامل $I = \int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\varphi\, d\varphi$ حيث n عدد صحيح موجب.

السؤال الرابع :

١- اكتب نص مبرهنة تعميم قاعدة لايبنتز للتكاملات التابعة للوسيط

٢- احسب التكامل $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ باستخدام التكاملات التابعة للوسيط t.

انتهت الاسئلة

حل أسئلة الدورة الفصلية الثانية (٢٠١٦) :

السؤال الأول : برهن المبرهنة التالية :

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع مستمرة و معرفة على مجال مغلق $I = [a,b]$ حيث $-\infty < a < b < +\infty$ و بفرض أنها متقاربة بانتظام من تابع النهاية $f(x)$ على I عندئذٍ يكون التابع $f(x)$ قابل للمكاملة على I و تحقق العلاقة :

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx$$

الحل :

بما أن التوابع $f_n(x)$ في المتتالية مستمرة على $[a,b]$ و المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ يكون التابع $f(x)$ مستمراً و بالتالي قابل للمكاملة على $[a,b]$ و لدينا :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

نأخذ $\varepsilon > 0$ و بالتالي $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$

يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون:

$$\left|\underbrace{\int_a^b f_n(x)dx}_{\text{الحد العام}} - \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{النهاية}}\right| = \left|\int_a^b [f_n(x)dx - f(x)]dx\right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon$$

حيث $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ تكون المتتالية متقاربة بانتظام

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

السؤال الثاني :

١- أوجد قيمة الجداء التالي :

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}$$

الحل: نشكل متتالية الجداءات الجزئية $\{p_n\}$

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$

$$= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

$$p_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{6}{8} \cdots \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{13}{7} \cdots \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n^2+n+1}{3} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{2}{3}$$

أي أن قيمة الجداء هي $\frac{2}{3}$ والجداء متقارب.

٢- ادرس التقارب (المنتظم أو غير المنتظم) لمتتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ المعرفة على المجال $[0,1]$

الحل :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \qquad ; \; I = [0,1]$$

تابع النهاية:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$$

و لنوجد النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right| \quad ; \quad x \in [0,1]$$

عندما $x = \frac{1}{n}$ نلاحظ أن $f_n(x)$ يبلغ نهاية عظمى وقيمته عند هذه النقطة هي $\frac{1}{2}$

إذاً:

$$\lim_{n\to\infty} \sup\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad ; \quad x \in [0,1]$$

وبالتالي المتتالية غير متقاربة بانتظام حسب مبرهنة سابقة .

$$\sup\frac{nx}{1+n^2x^2} = \sup\begin{cases} 0 & ; \quad x = 0 \\ \dfrac{n}{1+n^2} & ; \quad x = 1 \\ 0 & \quad 0 < x \neq \dfrac{1}{n} < 1 \\ \dfrac{1}{2} & ; \quad x = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

٣- أوجد منطقة تقارب المتسلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n(5^n+1)}$$

الحل :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n(5^n+1)}$$

متسلسلة قوى مركزها $a = -2$

بفرض $y = x + 2$ تأخذ هذه المتسلسلة الشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n(5^n+1)} \qquad (*)$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(5^n+1)}\cdot\frac{(n+1)(5^{n+1}+1)}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}.\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+1}{5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}.\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left(5+\frac{1}{5^n}\right)}{5^n\left(1+\frac{1}{5^n}\right)}$$

$$= 1\times 5 = 5$$

فمجال التقارب للمتسلسلة $I =]-5,5[$

ولكن عندما $y = 5$ يتم الحصول من المتسلسلة (*) على المتسلسلة المتباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n(5^n+1)}$$

وعندما $y = -5$ يتم الحصول من المتسلسلة (*) على المتسلسلة المتقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,5^n}{n(5^n+1)}$$

إذاً فمنطقة تقارب المتسلسلة (*) هي $[-5,5[$ وهذا يعني أن المتسلسلة(*) لا تتقارب إلا من أجل جميع قيم y التي تحقق الشرط:

$-5 \le y < 5$ ومنه فالمتسلسلة الأصلية لا تتقارب إلا من اجل قيم x التي تحقق الشرط:

$$-5 < x+2 < 5$$

أي

$$-5-2 \le x < 5-2$$

$$-7 \le x < 3$$

ومنه فمنطقة تقارب المتسلسلة الأصلية هي $[-7,3[$

السؤال الثالث :

١- أثبت قاعدة ليجاندر $\boldsymbol{\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)}$

الحل : لدينا

$$B(p,p) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}\,dx = \int_0^1 (x-x^2)^{p-1}\,dx$$

نقوم بالإتمام إلى مربع كامل حيث

$$(x-x^2)=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$$

بالعودة للتكامل السابق و التعويض :

$$B(p,p)=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}dx$$

و لما كان التابع $f(x)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$ يرسم قطعاً مكافئاً فإنه يكون متناظراً بالنسبة لمحور تناظره $x=\frac{1}{2}$

$$B(p,p)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}dx$$

نفرض $\frac{1}{4}t=\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$

أو:

$$\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

نفاضل الطرفين:

$$\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}dt=-dx$$

$$\Rightarrow dx=-\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

بالتعويض بالتكامل:

$$\mathrm{B(p,p)}=-2\int_1^0\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\mathrm{t}\right)\right]^{\mathrm{p}-1}.\left(-\frac{1}{4}\mathrm{t}^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{dt}$$

$$=-2\int_1^0\frac{1}{4}\mathrm{t}^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\mathrm{t}\right]^{\mathrm{p}-1}\mathrm{dt}\qquad=-2\int_1^0\frac{1}{4}\mathrm{t}^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}(1-\mathrm{t})\right]^{\mathrm{p}-1}\mathrm{dt}$$

$$=-\frac{2.1}{4}\int_1^0\mathrm{t}^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}(1-\mathrm{t})\right]^{\mathrm{p}-1}\mathrm{dt}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 t^{-\frac{1}{2}}.(1-t)^{p-1}.\frac{1}{4^{p-1}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}.\frac{1}{4^{p-1}}\int_1^0 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2^{2p-2}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$\Longrightarrow B(p,p) = \frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

العلاقة بين تكاملي أولر حيث: $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

هنا:

$$B(p,p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(p+p)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}}B\left(-\frac{1}{2}+1\,,p-1+1\right)$$

$$= \frac{1}{2^{p-1}}B\left(\frac{1}{2},p\right)$$

ومنه:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2p-1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)\Gamma(2p)$$

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2p-1}}\Gamma(p)\Gamma(2p)$$

حيث $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

ومنه:

$$\boxed{\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)}$$

٢- ادرس تقارب التكامل $I=\int_1^{\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}$

الحل :

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{1+x^2}$$

يمكن تطبيق معيار نهاية النسبة حيث نختار التكامل $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ و نحسب النهاية :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1>0$$

و فالتكاملان $\int_1^{+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{1+x^2}$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ من نفس النوع و لكون $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ متباعد فإن التكامل المعطى يكون متباعد.

٣- تحسب قيمة التكامل $I=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\varphi\, d\varphi$ حيث n عدد صحيح موجب.

الحل : باستخدام تغيير المتحول:

$$\sin^2\varphi=t \Leftarrow \sin\varphi=t^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\varphi\, d\varphi=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$\cos\varphi=\sqrt{1-t}=(1-t)^{-\frac{1}{2}}$$

بتغيير حدود التكامل

$$\varphi=0\Longrightarrow t=0$$

$$\varphi=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow t=1$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\left(t^{\frac{1}{2}}\right)^{2n}.t^{-\frac{1}{2}}.\frac{1}{\cos\varphi}\,dt$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 t^n.t^{-\frac{1}{2}}.\frac{1}{\cos\varphi}\,dt$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}}.(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}B\left(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\dots\frac{1}{2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{n!}$$

حيث:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

و ذلك بالاستفادة من العلاقة:

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$$

بالعودة للتمرين: نوحد المقامات مع ملاحظة أن $\pi=\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$

$$J=\frac{1}{2}\,\frac{(2n-1)(2n-3)\dots3.1.\pi}{2^n.n!}$$

$$=\frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-1)(2n-3)\dots3.1}{2^n.n!}$$

لحساب $2^n.n!$:

$$2^n=\underbrace{2.2.2.2\dots2}_{\text{مرة}}$$

$$n!=1.2.3\dots(n-1).n$$

$$\Rightarrow 2^n.n!=(2.2.2.2\dots2)(1.2.3\dots.n)=(2.1)(2.2)(2.3)\dots(2n)=2.4.6\dots(2n-2)(2n)$$
$$=(2n)!!$$

و لدينا :

$$(2n-1)(2n-3)\dots 3.1=(2n-1)!!$$

ومنه:

$$I=\frac{\pi}{2}.\frac{(2n-1)!!}{(2n)!}$$

السؤال الرابع :

١- اكتب نص مبرهنة تعميم قاعدة لايبتنز للتكاملات التابعة للوسيط

الحل: ((تعميم قاعدة لايبتنز))

إذا كان التابع $f(x,t)$ مستمراً و كان له مشتقاً جزئياً مستمراً $\frac{\partial f}{\partial t}$ في المستطيل المغلق $[a,b]\times[t_1,t_2]$ و كان التابعان $a(t),b(t)$ معرفين و قابلين للاشتقاق و مشتقاتهما مستمرة على المجال $[t_1,t_2]$فإن مشتق التابع $F(t)$ يعطى بالدستور :

$$\frac{dF(t)}{dt}=\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx+f(a(t),t)\frac{da}{dt}-f(b(t),t)\frac{db}{dt}$$

٢- احسب التكامل $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ باستخدام التكاملات التابعة للوسيط t.

الحل :

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

لنعرف التابع :

$$F(t)=\int_0^t\frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}dx$$

فنلاحظ أن $F(1)=I$ و لكون شروط لايبتنز محققة نكتب :

$$\frac{dF}{dt}=\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}\right)dx+\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}-0$$

$$= \int_{0}^{t} \left(\frac{x}{1+tx}\right) \frac{dx}{1+x^2} + \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$$

و لنفرق الكسر في دالة المكاملة إذ نكتب :

$$\frac{x}{(1+tx)(1+x^2)} = \frac{A}{1+tx} + \frac{Bx+c}{1+x^2}$$

$$A = \lim_{x \to -\frac{1}{t}} \left(\frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{-\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}} = -\frac{t}{1+t^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(1+tx)(1+x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{Ax}{1+tx} + \lim_{x\to\infty} \frac{Bx^2+Cx}{1+x^2}$$

$$0 = \frac{A}{t} + B \Longrightarrow B = -\frac{A}{t} = \frac{1}{1+t^2}$$

لحساب C نضع $x = 0$:

$$0 = A + C \Longrightarrow C = \frac{t}{1+t^2}$$

إذن :

$$\frac{x}{(1+tx)(1+x^2)} = \frac{\left(-\frac{t}{1+t^2}\right)}{1+tx} + \frac{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)x + \frac{t}{1+t^2}}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+t^2}\left[-\frac{t}{1+tx} + \frac{x+t}{1+x^2}\right]$$

نعوض في التكامل و نكامل :

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} + \frac{1}{2}\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} + t\frac{arctan(t)}{1+t^2} + \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} + t\frac{arctan(t)}{1+t^2}$$

نكامل :

$$F(t) = \frac{1}{2}\int_{0}^{t} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}dt + \int_{0}^{t} \frac{t}{1+t^2}\underbrace{arctant}_{u}\, dt$$

لحساب التكامل الأخير نطبق التكامل بالتجزئة إذ نفرض $u = arctant$ و $dv = \frac{t}{1+t^2}$ فنجد أن :

$$F(t) = \frac{1}{2}\int_{0}^{t} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}dt + \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\, arctant\right]_0^t - \frac{1}{2}\int_{0}^{t} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\, arctant$$

الآن :

$$J = F(1) = \frac{1}{2}\ln(2)\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}\ln(2)$$

انتهى الحل ☺

أسئلة الدورة الفصلية التكميلي (٢٠١٦)

السؤال الأول : لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على المجال I و بفرض إنها متقاربة بانتظام على I من تابع النهاية $f(x)$، عندئذٍ إذا كانت حدود المتتالية توابع مستمرة على I فإن التابع $f(x)$ يكون مستمراً على I .

السؤال الثاني:

٤- أوجد قيمة الجداء التالي :

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$$

٥- ادرس التقارب (المنتظم أو غير المنتظم) لمتتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x)=x^n$ المعرفة على المجال $[p,q]$ حيث $0<p<q<1$

٦- ادرس تقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$ المعرفة على $]-1,1[$

السؤال الثالث:

١- أوجد قيمة التكامل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$ ثم وجد قيمة التكامل من أجل $m=4\,,n=6$

٢- ادرس تقارب التكامل $I=\int_{0^+}^{\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$ حيث s>0

السؤال الرابع :

١- اكتب نص مبرهنة تعميم قاعدة لايبتنز للتكاملات التابعة لوسيط

٢- احسب قيمة التكامل $\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}$

٣- أوجد $\frac{dF(t)}{dt}$ حيث $F(t)=\int_0^1\ln(x^2+t^2)\,dx$

انتهت الأسئلة

حل أسئلة الدورة الفصلية التكميلية (٢٠١٦) :

السؤال الأول: : لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على المجال I و بفرض إنها متقاربة بانتظام على I من تابع النهاية $f(x)$، عندئذٍ إذا كانت حدود المتتالية توابع مستمرة على I فإن التابع $f(x)$ يكون مستمراً على I.

الحل :

ليكن $x_0 \in I$ وليكن $\varepsilon > 0$ بما أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام فإنه يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ عندما $n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I

$f_n(x)$ حدودها توابع مستمرة ومنه من أجل $x_0 \in I$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون $n \geq N_0$ ويحقق:

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}: \ |x - x_0| < \delta \ , \qquad n \geq N_0$$

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0) \qquad : \quad x_0 \in I$$

أي من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون $|x - x_0| < \delta$

فإن:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|$$
$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

أي أن الدالة $f(x)$ مستمرة في x_0 وبالتالي $x_0 \in I$ أي $f(x)$ مستمرة على I.

السؤال الثاني:

١- أوجد قيمة الجداء التالي :

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$$

الحل : نشكل متتالية الجداءات الجزئية $\{p_n\}$

$$p_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$

$$=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

$$p_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{8}\cdots\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{13}{7}\cdots\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{2}{3}$$

أي أن قيمة الجداء هي $\frac{2}{3}$ والجداء متقارب.

٢- ادرس التقارب (المنتظم أو غير المنتظم) لمتتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x)=x^n$ المعرفة على المجال $[p,q]$ حيث $0<p<q<1$

الحل :

$$\forall\, x\in[p,q]\Rightarrow f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}x^n=0$$

إن $\lim_{n\to\infty}x^n=0$ بسبب ما يلي :

(لأنها متتالية هندسية أساسها أصغر تماماً من الواحد بالقيمة المطلقة)

ومنه المتتالية متقاربة نقطياً على هذا المجال ، وعلى أي جزء من هذا المجال هي متقاربة نقطياً أيضاً.

لنثبت أن المتتالية متقاربة بانتظام: نلجأ للتعريف:

من أجل كل $\varepsilon>0$ يوجد $N>\max\left(1,\frac{\ln\varepsilon}{\ln q}\right)$ بحيث يكون:

$$|f_n(x)-f(x)|=|x^n-0|=x^n<\varepsilon$$

و بقي لكي أن تتقارب البحث عن n المحققة للمتباينة: $x^n<\varepsilon$

$$x^n<\varepsilon\Rightarrow\ln x^n<\ln\varepsilon$$

$$n\ln x<\ln\varepsilon\Rightarrow n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}$$

ولكن بما أن $\ln x$ مقدار سالب(لأن x محصور بين الصفر والواحد) نقلب إشارة المتراجحة فيصبح:

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln q} \quad ; \quad x \in [p,q]$$

يجب أن لا يوجد علاقة بين x و n ونريد تصغير الكسر لذلك نكبر المقام ويكون ذلك بأخذ $x = q$

يوجد كل $\varepsilon > 0$ عدد N يحقق أنه عندما $n > \mathrm{N} = \max\left(1, \frac{\ln \varepsilon}{\ln q}\right)$ فإن

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < \varepsilon$$

المتتالية متقاربة بانتظام.

٣- ادرس تقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ المعرفة على $]-1,1[$

الحل: نشكل متتالية المجاميع الجزئية $\{s_n(x)\}$

$$s_n(x) = (x - x^2) + (x^2 - x^3) + \cdots + (x^{n-1} - x^n) + (x^n - x^{n+1})$$

$$\Rightarrow s_n(x) = x - x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (x - x^{n+1}) = x - 0 = x$$

حيث $|x| < 1$: $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$

بالتالي متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ المعرفة على $]-1,1[$ متقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = x \quad : x \in]-1,1[$$

السؤال الثالث:

١- أوجد قيمة التكامل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx$ ثم وجد قيمة التكامل من أجل $m = 4, n = 6$

الحل :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x . \cos^n x \, dx \quad ; \quad m,n \in \mathbb{N}$$

حسب الشكل المثلثي للتكامل البتاوي:

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta . \cos^{2q-1}\theta \ d\theta$$

$$m = 2p - 1 \Rightarrow 2p = m + 1 \Rightarrow p = \frac{m+1}{2}$$

$$n = 2q - 1 \Rightarrow 2q = n + 1 \Rightarrow q = \frac{n+1}{2}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x . \cos^n x \ dx$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

و لنأخذ حالة خاصة عندما $m = 4 , n = 6$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x . \cos^6 x \ dx$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{12}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{5.4.3.2.1} . \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

حيث:

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Gamma(6) = 5!$$

وبالتالي بالاختصار نجد:

$$I = \frac{3\pi}{2^9} = \frac{3\pi}{512}$$

٢- ادرس تقارب التكامل $I = \int_{0^+}^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$ حيث $s>0$

الحل :

$$I = \int_{0^+}^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx \qquad : s > 0$$

نلاحظ أن $x=0$ نقطة شاذة لأنه عندما تكون $0 < s < 1$ سيصبح لدينا $x = 0$ في المقام لذلك هي نقطة شاذة و أن التكامل المعطى يكتب بالشكل :

$$I = \int_{0^+}^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx = \int_{0^+}^{1} e^{-x}x^{s-1}dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$$

وجدنا سابقاً أن التكامل $\int_1^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$ متقارب لأنه لو طبقنا معيار نهاية النسبة للتكامل السابق مع التكامل $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$ فنجد :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}x^{s-1}}{1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{s+1}}{e^x} = 0$$

و لما كان التكامل $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$ متقارب يكون التكامل $\int_1^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$ متقارباً

بقي لكي يتقارب التكامل المعطى أن ندرس تقارب تكامل $\int_{0^+}^{1} e^{-x}x^{s-1}dx$ كما يلي :

لنضع $x = \frac{1}{u}$ عندئذٍ $dx = -\frac{du}{u^2}$ كما أن $x = 0 \Rightarrow u = \infty$ و $x = 1 \Rightarrow u = 1$

$$\int_{0+}^{1} e^{-x}x^{s-1}dx = -\int_{\infty}^{1} e^{-\left(\frac{1}{u}\right)}\left(\frac{1}{u}\right)^{s-1}\frac{du}{u^2} = \int_{1}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{u}\right)}u^{-s-1}du$$

إن التابع المكامل هنا يكتب بالشكل $\frac{1}{e^{\frac{1}{u}}\ u^{s+1}}$ و لنطبق نعيار نهاية النسبة مع التكامل $\int_1^\infty \frac{1}{u^{s+1}}du$ فنجد أن :

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\frac{1}{e^{\frac{1}{u}}\ u^{s+1}}}{\frac{1}{u^{s+1}}}=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{1}{u}}}=1>0$$

و لما كان التكامل $\int_1^\infty \frac{1}{u^{s+1}}du$ متقارباً ((من الشكل $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx : p>1$)) فإن

التكامل $\int_1^\infty e^{-\left(\frac{1}{u}\right)}u^{-s-1}du$ متقارب

مما سبق نخلص إلا أن التكامل $I=\int_{0^+}^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ متقارب.

السؤال الرابع :

١- اكتب نص مبرهنة تعميم قاعدة لايبتنز للتكاملات التابعة لوسيط

((تعميم قاعدة لايبتنز))

إذا كان التابع $f(x,t)$ مستمراً و كان له مشتقاً جزئياً مستمراً $\frac{\partial f}{\partial t}$ في المستطيل المغلق $[a,b]\times[t_1,t_2]$ و كان التابعان $a(t),b(t)$ معرفين و قابلين للاشتقاق و مشتقاتهما مستمرة على المجال $[t_1,t_2]$ فإن مشتق التابع $F(t)$ يعطى بالدستور :

$$\frac{dF(t)}{dt}=\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx+f(a(t),t)\frac{da}{dt}-f(b(t),t)\frac{db}{dt}$$

٢- احسب قيمة التكامل $\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}$.

$$I=\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}dx$$

هذا التكامل من الشكل:

$$B(p,q)=\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$$

حيث:

$$p-1=\frac{1}{4}\Rightarrow p=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$$

$$p+q=2\Rightarrow q=2-p=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$$

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}\,dx=B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}$$

نذكر أن:

$$\frac{5}{4}=\frac{1}{4}+1\quad,\quad\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$

$$\Gamma(2)=\Gamma(1+1)=1.\Gamma(1)=1$$

ومنه:

$$I=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}{1}$$

$$I=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

حيث نلاحظ أنها من الشكل:

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)$$

فحسب قاعدة ليجاندر:

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)$$

بالعودة للتمرين:

$$I=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\left(\frac{1}{4}\right)-1}}\Gamma\left(2\left(\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-\frac{1}{2}}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$I=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-\frac{1}{2}}}.\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{2}.\pi}{4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

٣- أوجد $\frac{dF(t)}{dt}$ حيث $F(t) = \int_0^1 ln(x^2 + t^2)\, dx$

الحل :

لنتحقق بدايةً من شروط مبرهنة لايبتنز :

لدينا التابع المكامل : $f(x,t) = \ln(x^2 + t^2)$ مستمر على المستطيل $[0,1] \times [t_1, t_2]$ حيث $0 < t_1$

كذلك فإن المشتق الجزئي $\frac{2t}{x^2+t^2} = \frac{\partial \ln(x^2+t^2)}{\partial t} = \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ و هذا التابع أيضاً مستمر على المستطيل المذكور سابقاً ، فشروط قاعدة لايبتنز محقق. لذلك نكتب :

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_0^1 \ln(x^2 + t^2)\, dx = \int_0^1 \frac{\partial \ln(x^2 + t^2)}{\partial t} dx = \int_0^1 \frac{2t}{x^2 + t^2} dx$$

$$= \left[2\arctan\left(\frac{x}{t}\right)\right]_{x=0}^{x=1} = 2\arctan\left(\frac{1}{t}\right)$$

انتهى الحل ☺

إعداد : نذير تيناوي – عبد الرحمن البحش – محمد أنس القزاز