نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄المحاضرة: الخامسة عشر   عنوان المحاضرة: التكاملات المعتلة

في هذه المحاضرة سنكمل ما بدأناه في بحث التكاملات المعتلة وسنتعرف على التكاملات المعتلة من النوع الثاني كما سنأخذ معايير تقاربها ومنها (معيار المقارنة-معيار نهاية النسبة) بالإضافة إلى الأمثلة .

التكاملات المعتلة من النوع الثاني:

ليكن $f(x)$ تابع معرف على $]a,b]$ لنفرض وجود التكامل $I(t)=\int_t^b f(x)\,dt \;:\; a\le t\le b$

نسمي هذا التكامل بالتكامل المعتل من النوع الثاني إذا وجدت النهاية

$$\lim_{t\to a} I(t)=\lim_{t\to a}\int_t^b f(x)\,dx \,\ldots\ldots(*)$$

وتكون $=\int_{a^+}^b f(t)\,dx$

نقول أن التكامل متقارب وقيمته A أي: $\int_{a^+}^b f(t)\,dx=A$

أما إذا كانت النهاية في $(*)$ غير موجودة أو غير محدودة نقول أن التكامل متباعداً

كذلك نعرف التكامل المعتل من النوع الثاني

$$\lim_{t\to b} I(t)=\lim_{t\to b}\int_a^t f(t)\,dt=\int_a^{b^-} f(x)\,dx$$

حيث $f(x)$ معرفاً على المجال $[a,b[$ $\quad a<t<b$

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx=\int_{a^+}^{t\text{ أو }c} f(x)\,dx+\int_{t\text{ أو }c}^{b^-} f(x)\,dx$$

$x\in[a,b]$ ومنه $\int_a^b f(x)\,dx$ تكامل محدد

-التكامل المختلط : هو تكامل معتل من النوع الأول والثاني :

$$\int_{a^+}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{a^+}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

فهنا جزئنا التكامل إلى مجموع تكاملين أولهما معتل من النوع الثاني و الآخر معتل من النوع الأول.

مثال : ادرس تقارب التكامل : $s > 0$: $I = \int_{0^+}^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$

الحل :

نلاحظ أن $x=0$ نقطة شاذة لأنه عندما تكون $0 < s < 1$ سيصبح لدينا $x = 0$ لذلك هي نقط شاذة

و أن التكامل المعطى يكتب بالشكل :

$$I = \int_{0^+}^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = \int_{0^+}^{1} e^{-x} x^{s-1} dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

وجدنا في المحاضرة السابقة أن التكامل $\int_1^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ متقارب لأنه لو طبقنا معيار نهاية النسبة للتكامل السابق مع التكامل $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ فنجد :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x} x^{s-1}}{1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{s+1}}{e^x} = 0$$

و لما كان التكامل $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ متقارب يكون التكامل $\int_1^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ متقارباً

بقي لكي يتقارب التكامل المعطى أن ندرس تقارب تكامل $\int_{0^+}^{1} e^{-x} x^{s-1} dx$ كما يلي :

لنضع $x = \frac{1}{u}$ عندئذٍ $dx = -\frac{du}{u^2}$ كما أن $x = 0 \Rightarrow u = \infty$ و $x = 1 \Rightarrow u = 1$

$$\int_{0^+}^{1} e^{-x} x^{s-1} dx = -\int_{\infty}^{1} e^{-\left(\frac{1}{u}\right)} \left(\frac{1}{u}\right)^{s-1} \frac{du}{u^2} = \int_{1}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{u}\right)} u^{-s-1} du$$

إن التابع المكامل هنا يكتب بالشكل $\frac{1}{e^{\frac{1}{u}}\, u^{s+1}}$ و لنطبق نعيار نهاية النسبة مع التكامل $\int_1^{\infty} \frac{1}{u^{s+1}} du$ فنجد أن

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\frac{1}{e^{\frac{1}{u}}\, u^{s+1}}}{\frac{1}{u^{s+1}}} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{u}}} = 1 > 0$$

و لما كان التكامل $\int_1^\infty \frac{1}{u^{s+1}}du$ متقارباً ((من الشكل $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx : p > 1$)) فإن

التكامل $\int_1^\infty e^{-\left(\frac{1}{u}\right)}u^{-s-1}du$ متقارب

مما سبق نخلص إلا أن التكامل $I = \int_{0^+}^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ متقارب.

مثال ٢ : ادرس تقارب التكامل $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

نلاحظ أن التكامل المعطى يعاني انقطاعاً عند طرفي المجال و بالتالي لنقسمه إلى تكاملين كما يلي :

$$\mathrm{I} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{t\to 1}\left(\int_{-b}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \lim_{t\to 1}\left([arcsinx]_{-b}^{0} + [arcsinx]_0^b\right)$$

$$= \lim_{t\to 1}(-\arcsin(-b) + \arcsin(b)) = \left(-\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

التكامل متقارب ونهايته π

مثال ٣ : ادرس تقارب التكامل

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{t\to 1}\int_0^t (1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{t\to 1}\left[-2(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^t$$

مثال ٤ : ادرس تقارب التكامل

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lim_{\substack{b\to 1\\ a\to -1}} -\int_a^b \frac{-2\,x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\substack{b\to 1\\ a\to -1}} \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_a^b$$

$$= \lim_{\substack{b\to 1\\ a\to -1}} \left[-\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-a^2}\right] = 0$$

معايير تقارب التكاملات المعتلة من النوع الثاني:

١) مبرهنة :

ليكن التكامل $a < t \le b$: $\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx$ موجوداً من أجل كل قيم x تحقق الشرط $a < x \le b$

فإن الشرط اللازم والكافي لتقارب التكامل $\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx$ هو أن يوجد $M > 0$ عدد ثابت بحيث يكون:

$$\left|\int_t^b f(x)\,dx\right| \le M$$

وذلك أياً كان t الذي يحقق الشرط $a < t \le b$

٢) معيار المقارنة :

ليكن التابعين $f(x), g(x)$ معرفان على $]a, b]$ حيث $f(x) \ge 0$ و $g(x) \ge 0$

وبفرض أن التكاملين $\int_t^b f(x)\,dx$ و $\int_t^b g(x)\,dx$ موجودان وتحقق الشرط :

$$f(x) \le c\;.g(x) \quad : c \in \mathbb{R}^+$$

فإذا كان $\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx$ متقارب فإن $\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx$ متقارب

وإذا كان $\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx$ متباعد فإن $\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx$ متباعد ويكون :

$$\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx \le c\,.\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx$$

٣) معيار نهاية النسبة :

بفرض أن التكاملين $\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx$ و $\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx$ موجودان من أجل جميع قيم x

المحققة للشرط $a < t \le b$ حيث $g(x) > 0$ و $f(x) \ge 0$ وكان :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c$$

فإذا كان $c>0$ فإن التكاملين $\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx$ و $\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx$ من نوع واحد أي يتقاربان معاً أو يتباعدان معاً.

وإذا كان $c=0$ فإن تقارب $\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx$ يقتضي تقارب التكامل $\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx$

ملاحظة: إذا كان $F(x)$ تابع أصلي للتابع $f(x)$ وكان $f(x)$ غير محدود عند النقطة a^+ (a^+ هي نقطة شاذة لـ $f(x)$)

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx=\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx=[F(x)]_{a^+}^{b}$$
$$=F(b)-F(a^+)$$

إذا كان $F(a^+)$ معرف (موجود ومحدود) فإن التكامل موجود(متقارب)

وإذا كان $F(a^+)$ غير موجودة عند هذه النقطة يكون التكامل متباعد.

مثال:

$$I=\int_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

نلاحظ أن النقطة $x=0$ الواقعة ضمن المجال هي نقطة شاذة للتابع $f(x)$ ولكن التابع الأصلي للتابع $f(x)$

مستمر عند هذه النقطة لأن $\lim_{x\to 0} F(x)=0$ و $F(0)=0$

وبالتالي:

$$\int_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\left[\frac{3}{2}\,x^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{8}=6-\frac{3}{2}=\frac{12-3}{2}=\frac{9}{2}$$

مثال:

$$I = \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ يملك نقطة شاذة عند $x = 1$

$$I = \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\frac{1}{2}(\arcsin x)^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}\right]^2 = \frac{\pi}{8}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد أنس القزاز – لانا شهاب