◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة: الثامنة عشر عنوان المحاضرة : اختبارات التقارب

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-اختبار راب

٢-اختبار ديركليه

اختبار راب

لتكن $\sum 3_n$ متسلسلة عقدية إذا كانت $-1 > L = \overline{lim}\, n\left[\left|\frac{3_{n+1}}{3_n}\right| - 1\right]$

فأن $\sum 3_n$ متقاربة بالإطلاق

*ولم يذكر الدكتور مثال على هذا الاختبار أو المعيار

اختبارات التقارب

(هذا الاختبار لمعرفة فيما إذا كانت متباعدة أو متقاربة)

تمهيدية : لتكن $\{A_n\},\{V_n\}$ متتاليتان عقديتان بحيث تكون :

$$\lim V_n A_n = A$$

أي محدودة (يعني طويلته أصغر من ∞) عندئذ يكون للمتسلسلتين التاليتين :

١. $A_0V_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n-1})V_n \ldots.$

٢. $\sum_{n=0}^{\infty}(V_n - V_{n+1})A_n \ldots.$

لهما طبيعة ذاتها (متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً)

الأثبات :

$$S_n = A_0V_0 + (A_1 - A_0)V_1 + (A_2 - A_1)V_2 + \cdots + (A_n - A_{n-1})V_n$$

$$= A_0V_0 + A_1V_1 - A_0V_1 + A_2V_2 - A_1V_2 + \cdots + A_nV_n - A_{n-1}V_n$$

$$\sigma_{n-1} = (V_0 - V_1)A_0 + (V_1 - V_2)A_1 + \cdots + (V_{n-1} - V_n)A_{n-1}$$

$$= V_0A_0 - V_1A_0 + V_1A_1 - V_2A_1 + \cdots + V_{n-1}A_{n-1} - V_nA_{n-1}$$

$$\Longrightarrow S_n - \sigma_{n-1} = A_nV_n$$

إن تقارب $\{S_n\}$ يكافئ تقارب $\{\sigma_{n-1}\}$

وهذا يعني أن للمتسلسلتين ١و٢ الطبيعة ذاتها

اختبار ديركليه

إذا تحققت الشروط الثلاثة :

١- لـ $\sum a_n$ مجاميع جزئية محدودة
٢- $\sum(V_n - V_{n+1})$ متقاربة بالإطلاق
٣- $V_n \longrightarrow 0$

فإن المتسلسلة العقدية $\sum a_nv_n$ متقاربة

البرهان :

لتكن $\{A_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum a_n$ أي :

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

هذه متتالية محدودة حسب (١)

ولدينا $V_n \longrightarrow 0$ حسب (٣)

وهذا يقتضي أن $A_nV_n \longrightarrow 0$ (لأنه جداء متتالية محدودة بمتتالية تسعى إلى الصفر هي متتالية تسعى إلى الصفر) فحسب التمهيدية للمتسلسلتين :

$$A_0V_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n-1})V_n = a_0v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_nv_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_nv_n \ldots\ldots \quad ١$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(V_n - V_{n+1})A_n \ldots\ldots \quad ٢$$

٢

حتى يتم المطلوب يجب أن نثبت أن متقاربة (حتى يكون لهما الطبيعة ذاتها وهي التقارب)

$\{A_n\}$ محدودة $\Leftarrow$ يوجد M بحيث $\forall n$ فإن $|A_n| < M$ ومنه

$$|(V_n - V_{n+1})A_n| \leq M|V_n - V_{n+1}|$$

بما أن $\sum M|V_n - V_{n+1}|$ متقاربة (لأن $\sum V_n - V_{n+1}$ متقاربة بإطلاق حسب ٢) فإن

$\sum|(V_n - V_{n+1})A_n|$ متقاربة (حسب معيار المقارنة) ومنه فإن $\sum(V_n - V_{n+1})A_n$ متقاربة بإطلاق فهي متقاربة (لأن كل متقاربة بإطلاق تكون متقاربة) وهو المطلوب

ملاحظة :

إذا اختل أحد الشروط فلا أستطيع أن أقول عن المتسلسلة أنها متقاربة أو متباعدة

تمرين: أثبت أن $\sum \frac{i^n}{n}$ متقاربة

الحل $\quad a_n = i^n \qquad V_n = \frac{1}{n}$

إن : $\quad A_n = i + i^2 + i^3 + \cdots + i^n$

وهي متسلسلة هندسية مجاميعها الجزئية

$$S_n = \frac{b - ba^n}{1 - a}$$

$$\rightarrow A_n = \frac{i - i(i^n)}{1 - i}$$

$$\Rightarrow |A_n| \leq \frac{1 + 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$\Leftarrow$ محدودة $\Leftarrow$ الشرط الاول من ديركند محقق

كما أن $V_n \rightarrow 0 \Leftarrow$ الشرط الثالث من ديركند محقق

ثم أن $\quad \sum_{n=1}^{\infty}|(V_n - V_{n+1})| = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$

وهي متسلسلة متقاربة لأن :

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1-\frac{1}{n+1} \longrightarrow 1$$

بالنتيجة $\sum(V_n - V_{n+1})$ متقاربة بالإطلاق والشرط الثاني محقق

تحققت الشروط الثلاثة لديركند $\Longleftarrow \sum \frac{i^n}{n} = \sum a_n v_n$ متقاربة

تمرين: ادرس حسب القيم $ʒ$ تقارب المتسلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} Sin\left(\frac{\pi}{n}\right)ʒ_n$$

الحل

نميز حالتين :

١) - $ʒ = 0 \Longleftarrow$ متقاربة بإطلاق

٢) - $ʒ \neq 0$ لنطبق معيار دالامبير

$$n \geq 2 : \left|\frac{ʒ_{n+1}}{ʒ_n}\right| = \left|\frac{Sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)ʒ^{n+1}}{Sin\left(\frac{\pi}{n}\right)ʒ^n}\right| = |ʒ|\frac{Sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{Sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

لأن $n \geq 2 \Longleftarrow 0 < \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{2}$

($\frac{\pi}{n}$ زاوية في الربع الأول و لـ Sin لها يكون موجب)

الأن لنأخذ نهاية
$$\lim_{n\to\infty}\frac{Sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{Sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\frac{Sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{\frac{\pi}{n+1}}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{Sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)}.\lim\frac{1}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \,.\lim 1 = 1.1 = 1$$

$$L_3 = \lim\left|\frac{3_{n+1}}{3_n}\right| = 1.|3| = |3| \quad \Leftarrow$$

نميز حالتين :

١ - $|3| < 1 \Leftarrow L_3 < 1$ ← المتسلسلة متقاربة بالإطلاق
٢ - $|3| > 1 \Leftarrow L_3 > 1$ ← المتسلسلة متباعدة
٣ - $|3| = 1 \Leftarrow L_3 = 1$ ← حالة شك (يفشل المعيار)

نميز في الحالة الثالثة حالتين :

a) $3 = 1$ وتصبح المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} Sin\,\frac{\pi}{n}\,3^n = \sum_{n=1}^{\infty} Sin\,\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Sin\,\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \pi \neq 0 < \infty$$

$\Leftarrow$ للمتسلسلتين $\sum\frac{1}{n}\,,\sum\frac{\pi}{n}$ الطبيعة ذاتها ولما كانت $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة بالتالي $\sum Sin\,\frac{\pi}{n}$ متباعدة

b) $|3| = 1\,,\; 3 \neq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(Sin\,\frac{\pi}{n}\right)3^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} Sin\,\frac{\pi}{n}$$

وهي متباعدة كما رأينا

فالمتسلسلة $\sum Sin\,\frac{\pi}{n}\,3^n$ ليست متقاربة بإطلاق عندما $|3| = 1\,,\; 3 \neq 1$

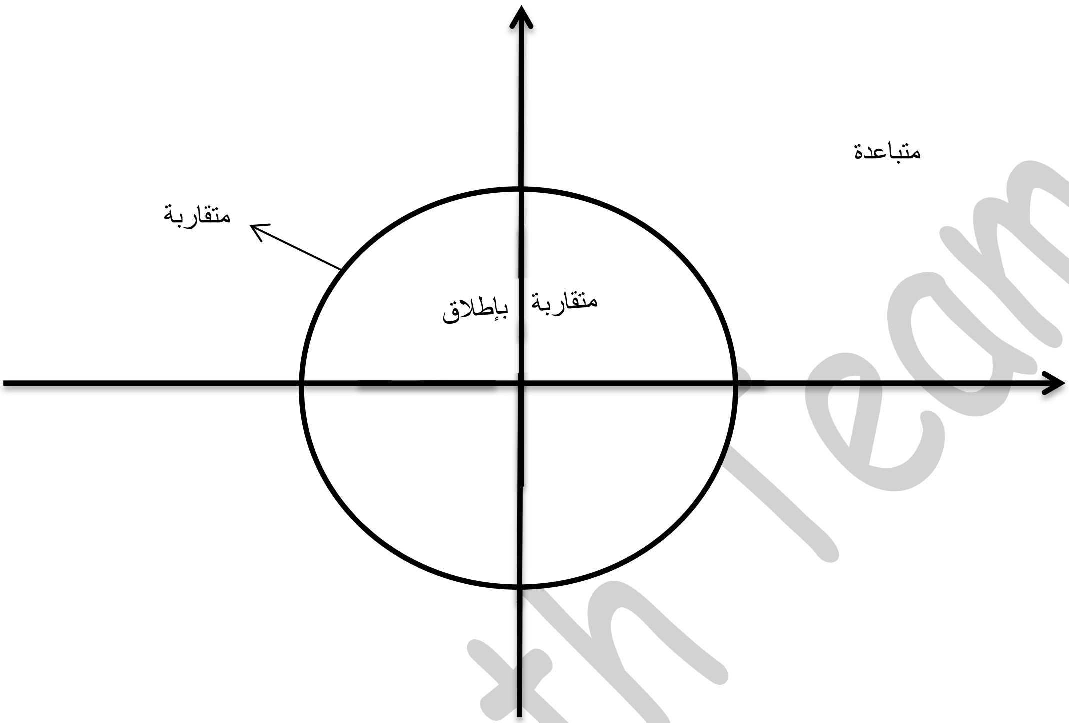
لنطبق ديركند $v_n = Sin\,\frac{\pi}{n} \to 0 \qquad a_n = 3^n$

ثم أن $|A_n| \le \frac{|3|+|3|^{n+1}}{|1-3|} \le \frac{2}{|1-3|}$

كما أن $\sum\left|\left(Sin\,\frac{\pi}{n} - Sin\,\frac{\pi}{n+1}\right)\right|$

متقاربة بإطلاق $\Leftarrow \sum Sin\,\frac{\pi}{n}\,3^n$ متقاربة

بالنتيجة فهي تمثل قرص تقارب متسلسلة القوى المدروسة ونصف قطر تقارب هذه المتسلسلة ١



انتهت المحاضرة

إعداد: ميار طعمة- شهناز طاطيش- يمنى خرما