26-11-2017

نظري

◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة: السابع عشرة

◄ عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية غير المتجانسة وذات الأمثال الثابتة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-المعادلات التفاضلية غير المتجانسة وذات الأمثال الثابتة.

2-أشكال جذور المعادلات التفاضلية غير المتجانسة وذات الأمثال الثابتة.

3-أمثلة لتوضيح الأفكار المذكورة سابقاً.

◄ تنويه: سنبدأ محاضرتنا بتمرين لرفد فكرة قد انتهت بها المحاضرة السابقة ☺ .

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + 9y = 0$$

الحل

المعادلة المميزة: $\lambda^2 + 9 = 0$

جذور المعادلة المميزة: $\lambda = \mp 3i$

الحل الخاص $\begin{cases} y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{3ix} = \cos 3x + i.\sin 3x \\ y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-3ix} = \cos 3x - i.\sin 3x \end{cases}$

الحل العام هو:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1(\cos 3x + i.\sin 3x) + c_2(\cos 3x - i.\sin 3x)$$

$$= (c_1 + c_2).\cos 3x + (c_1 - c_2).i.\sin 3x$$

$$= A.\cos 3x + B.\sin 3x : A = c_1 + c_2 , B = i.(c_1 - c_2)$$

المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة وذات الأمثال الثابتة:

- تكون المعادلة من الشكل:

$$\underbrace{a_0.y^{(n)} + a_1.y^{(n-1)} + \cdots + a_n.y}_{L(y)} = g(x) \ldots (1)$$

حيث $g(x)$ هي عبارة عن دالة.

لإيجاد الحل العام:

نوجد أولاً الحل بدون طرف ثانٍ أي (معادلة تفاضلية متجانسة) ومن ثم نوجد الحل الخاص مع طرف ثانٍ ثمّ نجمع الحلين فنحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة ذات الأمثال الثابتة.

1- نفرض أن الدالة $g(x)$ هي عبارة عن جداء كثير حدود من الدرجة n بدالة أسيّة أي من الشكل:

$$L(y) = P_m(x).e^{\alpha x} : m \geq 0 , \alpha \epsilon \mathbb{R}$$

عند إيجاد الحل الخاص y_p نميز حالتين:

1ً- إذا كانت α ليست جذر للمعادلة المميزة:

$$a_0.\lambda^n + a_1.\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

في هذه الحالة سنبحث عن حل خاص من الشكل:

$$y_p = q_m(x).e^{\alpha x}$$

حيث $q(x)$ هي حدودية (كثيرة حدود) من الدرجة n بأمثال $q_1, q_2, \ldots, q_n$ يجب تحديدها عن طريق الاشتقاق والمطابقة مع الطرف الثاني والمطابقة مع أمثال x ذات الأُسس المتماثلة.

2ً- إذا كانت α جذر للمعادلة المميزة من المرتبة $k \geq 1$ عندئذٍ نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$y_P = x^k.q_m(x).e^{\alpha x}$$

نشتق ونعوض ونطابق ثم نعين الأمثال $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

2- نفرض أن الدالة $g(x)$ التي تمثل الطرف الأيمن من المعادلة (1) يمكن أن تكتب بالشكل:

$$g(x) = e^{\alpha x}[P_{1m}(x).\cos bx + P_{2m}(x).\sin bx$$

حيث $P_{1m}(x), P_{2m}(x)$ حدوديتان من الدرجة m إحداهما أو كلتاهما.

وبالتالي بالاستفادة من تمثيل أولر للدوال المثلثية نجد أن $g(x)$ تمثل مجموع حلين من الشكل التالي:

$$g(x) = P_{1m}(x).e^{(\alpha+\beta i)x} + P_{2m}(x).e^{(\alpha-\beta i)x}$$

لإيجاد الحل الخاص نميز حالتين:

1- $(\alpha + \beta i)$ ليس جذر للمعادلة المميزة عندئذٍ الحل الخاص يأخذ الشكل:

$$y_P = e^{\alpha x}[q_{1m}(x).\cos bx + q_{2m}(x).\sin bx]$$

حيث $q_{1m}(x), q_{2m}(x)$ يجب تعيينها عن طريق الاشتقاق و المطابقة.

2- $(\alpha - \beta i)$ جذر للمعادلة المميزة عندئذٍ الحل الخاص يأخذ الشكل:

$$y_P = x^k.e^{\alpha x}[q_{1m}(x).\cos bx + q_{2m}(x).\sin bx]$$

مثال: أوجد الحال العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' - 7y' = 6e^{6x}$$

الحل

1- نوجد الحل العام للمعادلة بدون طرف ثانٍ:

$$y'' - 7y' = 0$$

المعادلة المميزة:

$$\lambda^2 - 7\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 , \lambda_2 = 7$$

الحل العام بدون طرف ثانٍ:

$$y = c_1 + c_2.e^{7x}$$

2- نوجد الحل الخاص:

نلاحظ أن $\alpha = 6$ ليست جذراً للمعادلة المميزة فعليه يكون الحل الخاص من الشكل:

$$y_P = A.e^{6x} \Rightarrow y'_P = 6A.e^{6x} \Rightarrow y''_P = 36A.e^{6x}$$

نعوض بالمعادلة مع طرف ثانٍ:

$$36A.e^{6x} - 42A.e^{6x} = 6e^{6x} \Rightarrow -6A.e^{6x} = 6e^{6x} \Rightarrow A = -1$$

الحل الخاص:

$$y_P = -e^{6x}$$

فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ هو:

$$Y = y + y_P = c_1 + c_2 . e^{7x} - e^{6x}$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' - 4y' + y = 2x^3 + 3x^2 + 1$$

الحل

1ً- نوجد الحل العام بدون طرف ثانٍ:

$$y'' - 4y' + y = 0$$

المعادلة المميزة:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3} \, , \lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(2+\sqrt{3})x} \, , y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(2-\sqrt{3})x}$$

فيكون الحل العام بدون طرف ثانٍ هو:

$$y = c_1 . e^{(2+\sqrt{3})x} + c_2 . e^{(2-\sqrt{3})x}$$

2ً- نوجد الحل الخاص:

نلاحظ أن $\alpha = 0$ ليست جذرا للمعادلة:

$$y_P = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$$y'_P = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y''_P = 6Ax + 2B$$

نعوض بالمعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ ونطابق فنجد أن:

$$A = 2 \, , B = 27 \, , C = 204 \, , D = 761$$

الحل الخاص:

$$y_P = 2x^3 + 27x^2 + 204x + 761$$

وعليه يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ هو:

$$Y = y + y_P$$

$$= c_1 . e^{(2+\sqrt{3})x} + c_2 . e^{(2-\sqrt{3})x} + 2x^3 + 27x^2 + 204x + 761$$

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصر الله وياسين الحُلبي ورهف النقشي

.

ليست الأمراض في الأجساد فقط بل في الأخلاق, لذا اذا رأيت سيء الخلق فادع له بالشفاء و احمد الله الذي عافاك مما ابتلاه

#ساعد غيرك