21-11-2017

نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: السادسة عشر عنوان المحاضرة: التكاملات المعتلة

في هذه المحاضرة سنتعرف على تكاملات أولر من النوعين الأول والثاني بالإضافة إلى بعض خواص التكامل البتاوي ومنها (التناظر- تغير الوسيط- تغير المتحول- الشكل المثلثي) وخواص التكامل الغماوي

◄ تكامل أولر من النوع الأول:

تعريف: نسمي التكامل المعتل $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

تكامل أولر من النوع الأول أو التكامل البتاوي وهو يمثل تابع يتعلق بوسيطين (أي يتبع لمتغيرين) هما $p\,,q$ التابع $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ معرف على $]0,1[$ نكتب:

$$B(p,q)=\int_{0^+}^{a} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx+\int_{a}^{1^-} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

بفرض $0<a<1$.

إن التكامل البتاوي موجود و متقارب من أجل $p>0\,,q>0$

الإثبات :

بالنسبة للتكامل الأول نقارنه مع التابع x^{p-1} حسب الخاصية الثالثة من معايير التقارب نكتب:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=c$$

أي:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}}=1$$

أي أن $\int_{0^+}^{a} x^{p-1}\,dx$

و $\int_{0^+}^{a} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ من نوع واحد لما كان:

Syria Math Team

$$\int_{0^+}^{a} x^{p-1}\,dx = \left[\frac{x^p}{p}\right]_{0^+}^{a} = \frac{a^p}{p} - \lim_{x\to 0}\frac{x^p}{p}$$

متقارب إذا كانت $p>0$ موجب فبالتالي $\int_{0^+}^{a} x^{p-1}\,dx$ عندما $p>0$

والآن التابع الثاني حسب معيار نهاية النسبة نجد أن:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}} = \lim_{x\to 1^-}(x^{p-1}) = 1 > 0$$

نجد أن التكاملين $\int_a^{1^-}(1-x)^{q-1}\,dx$ و $\int_a^{1^-} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ من نفس النوع

و أن $\int_a^{1^-}(1-x)^{q-1}\,dx$ متقارب عندما $q>0$ لأن:

$$\int_a^{1^-}(1-x)^{q-1}\,dx = \left[-\frac{(1-x)^q}{q}\right]_a^{1^-}$$

متقارب ومحدود إذا كانت $q>0$ فقط

ومنه:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

متقارب إذا كانت $p>0$ و $q>0$

بعض خواص التكامل البتاوي:

١) خاصة التناظر:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

بتغيير المتحول:

$$t = 1-x \Rightarrow x = 1-t$$

$$dt = -dx$$

وبتغيير حدود التكامل:

$$x=0 \Rightarrow t=1 \quad , \quad x=1 \Rightarrow t=0$$

Syria Math Team

والآن نعوض

$$B(p,q) = -\int_1^0 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$= \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt = B(q,p)$$

$$\Rightarrow \boxed{B(p,q) = B(q,p)}$$

٢) خاصية تغيير الوسيط:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

لكن نلاحظ أن $x^{p-1}dx = d\left(\frac{x^p}{p}\right)$ فالتكامل البياتاوي يكتب بالشكل :

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{q-1}\,d\frac{x^p}{p}$$

نكامل بالتجزئة:

بفرض $u = (1-x)^{q-1} \iff du = -(q-1)(1-x)^{q-2}$

$$dv = d\frac{x^p}{p} \iff v = \frac{x^p}{p}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^{q-1}\,d\frac{x^p}{p} = \left[(1-x)^{q-1}.\frac{x^p}{p}\right]_0^1 + \frac{q-1}{p}\int_0^{1^-} x^p(1-x)^{q-2}\,dx$$

نلاحظ أن $\left[(1-x)^{q-1}.\frac{x^p}{p}\right]_0^1 = 0$

ومنه:

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{q-1}\,d\frac{x^p}{p} = \frac{q-1}{p}\int_0^{1^-} x^p(1-x)^{q-2}\,dx$$

في الحقيقية يمكن أن نكتب ما يلي:

$$x^p = x^{p-1} - x^{p-1} + x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$$

Syria Math Team

نعوض بالتكامل:

$$B(p,q)=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\,dx-\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

$$B(p,q)=\frac{q-1}{p}[B(p,q-1)-B(p,q)]$$

$$B(p,q)+\frac{q-1}{p}B(p,q)=\frac{q-1}{p}B(p,q-1)$$

بإخراج $B(p,q)$ عامل مشترك من اليسار

$$B(p,q)\left(1+\frac{q-1}{p}\right)=\frac{q-1}{p}B(p,q-1)$$

$$\frac{p+q-1}{p}B(p,q)=\frac{q-1}{p}B(p,q-1)$$

نضرب الطرفين بـ $\frac{p}{p+q-1}$ فنجد :

$$\boxed{B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)}$$

نطبق نفس الدستور لحساب $B(p,q-1)$ فنجد:

$$B(q,p)=\frac{q-1}{p+q-1}.\frac{q-2}{p+q-2}.B(p,q-2)$$

بالمتابعة و بوضع $p=m$ و $q=n$ (حيث n,m أعداد طبيعية) نصل إلى أن :

$$B(m,n)=\frac{n-1}{m+n-1}.\frac{n-2}{m+n-2}\dots\frac{1}{m+1}B(m,1)\dots(*)$$

و لكن:

$$B(m,1)=\int_0^1 x^{m-1}\,dx=\left[\frac{x^m}{m}\right]_0^1=\frac{1}{m}$$

نعوض في $(*)$:

$$(m,n)=\frac{(n-1)!}{(m+n-1)(m+n-2)\dots(m+1)m}$$

لنضرب البسط و المقام بـ$(m-1)!$

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)+(m+n-2)\dots m(m-1)!}$$

$$B(m,n)=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

ومنه:

$$B(p,q)=\frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

٣) خاصية تغيير المتحول:

نفرض $x=\frac{y}{1+y}$

$$dx=\frac{1+y-y}{(1+y)^2}=\frac{1}{(1+y)^2}$$

$$1-x=1-\frac{y}{1+y}=\frac{1+y-y}{1+y}=\frac{1}{1+y}$$

كما نقوم بتغيير حدود التكامل لأننا قمنا بتغيير المتحول:

$$x=0\Longrightarrow y=0$$

$$x=1\Longrightarrow y\longrightarrow\infty$$

$$B(p,q)=\int_0^{\infty}\left(\frac{y}{1+y}\right)^{p-1}.\left(\frac{1}{1+y}\right)^{q-1}.\frac{1}{(1+y)^2}\,dy$$

$$B(p,q)=\int_0^{\infty}\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy$$

حفظ

Syria Math Team

وهو تكامل معتل من النوع الأول وللتكامل قيمة فقط عندما $q = 1 - p$ أي $p + q = 1$

وقيمته هي:

حفظ

$$B(p,q) = (p\ , 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

مثال:

$$B\left(\frac{1}{2}\ , \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$$

٤) الشكل المثلثي للتكامل البتاوي:

نضع $x = \sin^2\varphi \Longleftarrow dx = 2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$

نغير حدود التكامل:

$$x = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

نعوض بالتكامل:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx$$

فيصبح:

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\varphi)^{p-1}\,(1-\sin^2\varphi)^{q-1}.\sin\varphi\cos\varphi\ \ d\varphi$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-2}\varphi\,.\sin\varphi\,(1-\sin^2\varphi)^{q-1}.\cos\varphi\ \ d\varphi$$

ونحن نعلم أن:

$$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$$

بالتعويض نجد:

Syria Math Team

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-2+1}\varphi\,(\cos^2\varphi)^{q-1}.\cos\varphi\;d\varphi$$

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\varphi\,.\cos^{2q-2}\varphi\,.\cos\varphi\;d\varphi$$

$$\Longrightarrow B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\varphi\,.\cos^{2q-1}\varphi\;d\varphi$$ حفظ

تكامل أولر من النوع الثاني:

يعرف تكامل أولر من النوع الثاني والذي رمزه $\Gamma(p)$ بأنه التكامل المعتل:

$$\Gamma(p)=\int_{0^+}^{\infty}e^{-t}.t^{p-1}\,dt$$

وهو يمثل تابعاً يتعلق بوسيط واحد (أي يتبع لمتغير واحد) هو p

ويسمى هذا التكامل بالتكامل الغماوي يكتب اختصاراً بالشكل:

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty}e^{-t}.t^{p-1}\,dt$$

وتجدر الإشارة إلى أن هذا التكامل لا يكون موجوداً إلا إذا كان $p>0$

وذلك بملاحظة الآتي:

$$\Gamma(p)=\int_{0^+}^{1}\underbrace{e^{-t}.t^{p-1}\,dt}_{I_1}+\underbrace{\int_1^{\infty}e^{-t}.t^{p-1}\,dt}_{I_2}$$

حيث التكامل I_2 متقارب دوماً مهما يكن p بينما I_1 يمثل تكاملاً معتلاً من النوع الأول عندما $p-1<0$ وهو متقارب $p>0$

بعض خواص التكامل الغماوي:

نكامل بالتجزئة: $\Gamma(p)=\int_0^{\infty}e^{-t}.t^{p-1}\,dt$

بفرض: $u=e^{-t}\Longleftarrow du=-e^{-t}\,dt$ $\qquad$ $dv=t^{p-1}\,dt\Longleftarrow v=\frac{t^p}{p}$

$$\Gamma(p)=[u.v]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}v\,du$$

Syria Math Team

$$\Gamma(p) = \left[e^{-t}.\frac{t^p}{p}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t}.\frac{t^p}{p}\,dt$$

$$\Gamma(p) = \left[e^{-t}.\frac{t^p}{p}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-t}.t^p\,dt$$

إلا أن : $\left[e^{-t}.\frac{t^p}{p}\right]_0^{\infty} = \lim_{b\to\infty}\frac{e^{-b}b^p}{p} = 0$

$$\Longrightarrow \Gamma(p) = \frac{1}{p}\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-t}.t^p\,dt}_{\Gamma(p+1)}$$

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\Gamma(p+1)$$

$$\boxed{\Longrightarrow \Gamma(p+1) = p\Gamma(p)}$$

و إننا لو كررنا العملية السابقة عدداً منتهياً من المرات سنحصل على :

$$\boxed{\Gamma(p+1) = p(p-1)(p-2)\dots(p-n)\ \ \Gamma(p-n)}$$

نأخذ p قيمة بين عددين طبيعيين متتاليين:

$$n < p < n+1$$

$$\Rightarrow 0 < p-n < 1$$

و لنناقش حالة إذا كان $p = n$ عدد صحيح موجب ، فحسب ما سبق يكون :

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\dots 2.1.\Gamma(1)$$

إلا أن:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 1$$

$$\boxed{\Longrightarrow \Gamma(n+1) = n!}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد أنس القزاز – لانا شهاب

Syria Math Team