نظرية الاحتمالات

نظري

◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄ المحاضرة التاسعة عشر (والأخيرة)

عنوان المحاضرة : الصفات العددية للمتغيرات والأشعة العشوائية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- الدالة المولدة لعزوم (متغير عشوائي / شعاع عشوائي) وخواصها .

2- الدالة المميزة (لمتغير عشوائي / شعاع عشوائي) وخواصها .

3- تمارين وملاحظات .

الدالة المولدة لعزوم متغير عشوائي وخواصها

تعريف ليكن Y متغيراً عشوائياً كثافته $f_Y(y)$, نعرف الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي Y :

$$M_Y(t) := E(e^{t.y}) := \begin{cases} \sum_{y\in\mathbb{R}_Y} e^{t.y}.f_Y(y) \;\; ; & Y \text{ منقطع} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t.y}.f_Y(y).dy \; ; & Y \text{ مستمر} \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

خواص الدالة المولدة للعزوم

$$1)\; M_{aY+b}(t) = e^{tb}.M_Y(at) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,;\; \forall\, a,b \in \mathbb{R}$$

◄ **البرهان**

$$M_{aY+b}(t) := E(e^{t.(aY+b)}) = E(e^{at.y}.e^{t.b}) = e^{t.b}.E[e^{at.Y}] = e^{tb}.M_Y(at)$$

$$2)\; m_r := E(Y^r) = \frac{d^r M_Y(t)}{dt^r}\Big|_{t=0}$$

الاشتقاق أولاً من المرتبة r بالنسبة لـ t , وثم التعويض بـ $t = 0$ وبالتالي :

$$E(Y) = M_Y'(t)|_{t=0}$$

$$E(Y^2) = M_Y''(t)|_{t=0}$$

3) إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين فإنَّ :

$$M_{X+Y} = M_X(t).M_Y(t)$$

4) إذا كانت $X_1, \dots, X_n$ مجموعة متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس توزيع المتغير العشوائي X (متطابقة التوزيع) عندئذٍ :

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n}\left(M_X(t)\right) = \left(M_X(t)\right)^n$$

بسبب تطابق توزيعهم مع توزيع X .

5) هناك توزيع احتمالي وحيد له الدالة المولدة للعزم (t) .

6) إذا كانت X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين فإنَّ :

$$M_{(X+Y)}(t) = M_X(t).M_Y(t)$$

الإثبات

$$M_{X+Y}(t) = E\left[e^{t(X+Y)}\right] = E[e^{tx}.e^{ty}]$$

وفي حالة الاستمرار :

$$E[e^{tX}.e^{tY}] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}.e^{ty}.f(x,y).dx.dy$$

وبما أنَّ X و Y مستقلين فإنَّ : $f(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$

$$M_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}.e^{ty}.f_X(x).f_Y(y).dx.dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x).dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ty}.f_Y(y).dy$$

$$= M_X(t).M_Y(t)$$

مثال ليكن X متغيراً عشوائياً دالته الاحتمالية :

$$f_X(x) = \begin{cases} p & ; x = 1 \\ q & ; x = 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $M_X(t)$ واحسب العزوم من المرتبة الثالثة واستنتج تباين X بحيث : $0 < p < 1$ و $p + q = 1$

الحل

$$M_X(t):=E(e^{tx})\coloneqq\sum_{x_i\in\mathbb{R}_x}e^{(tx_i)}.f_X(x_i)$$

$$=e^{t(0)}.q+e^{t(1)}.p$$ لأنَّ x منقطع

$$M_X(t)=q+e^t.p\ ;\ \forall\, t\in\mathbb{R}$$

$$m_1\coloneqq E_X=\big(M_X(1)\big)_{t=0}=(p.e^t)_{t=0}=p$$

$$m_2\coloneqq E_{X^2}=\big(M_X(t)\big)''_{t=0}=(p.e^t)_{t=0}=p$$

$$m_3\coloneqq E_{X^3}=\big(M_X(t)\big)'''_{t=0}=(p.e^t)_{t=0}=p$$

$$V(X)=E_{X^2}-(E_X)^2=p-(p)^2=p(1-p)=p.q$$

الدالة المولدة لعزوم شعاع عشوائي وخواصها

تعريف ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة $f_{(X,Y)}(x,y)$, وإذا كان $E(e^{t_1X+t_2Y})$ موجوداً من أجل قيم $t_1,t_2\in\mathbb{R}$, فإننا نعرف الدالة المولدة لعزم الشعاع العشوائي (X,Y) :

$$M_{X,Y}(t_1,t_2)\coloneqq E(e^{t_1X+t_2Y})\coloneqq\begin{cases}\sum_x\sum_y e^{t_1x+t_2y}.f_{X,Y}(x,y)\ ; & (X,Y)\ \text{منقطع}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{t_1x+t_2y}f_{X,Y}(x,y).dx.dy & (X,Y)\ \text{مستمر}\end{cases}$$

خواص الدالة $M_{X,Y}(t_1,t_2)$

1) إنَّ $M_{X,Y}(t_1,t_2)$ تحدد توزيع (X,Y) , وتوزيع X وتوزيع Y بسبب الوحدانية .

2) $M_{(X,Y)}(t_1,0)=M_X(t_1)=E(e^{t_1X})$

3) $M_{X,Y}(0,t_2)=M_Y(t_2)=E(e^{t_2Y})$

4) $$E(X^k.Y^m)=\left[\frac{\partial^{k+m}M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1^k.\partial t_2^m}\right]_{t_1=0\ ,t_2=0}$$

5) $$E(X)=\left[\frac{\partial M_{X,Y}(t_1,0)}{\partial t_1}\right]_{t_1=0},E(Y)=\left[\frac{\partial M_{X,Y}(0,t_2)}{\partial t_2}\right]_{t_2=0}$$

$$E(X.Y)=\left[\frac{\partial^2M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1.\partial t_2}\right]\_(t_1=0\ ,t_2=0)$$

◀**ملحوظة** من خاصة الوحدانية للدالة المولدة للعزوم , فإننا نقول عن متغيرين عشوائيين X, Y إنهما مستقلان عشوائياً إذا وفقط إذا كان : $M_{X,Y}(t_1, t_2) = M_Y(t_1).M_Y(t_2)$

مثال ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً دالة كثافته المشتركة :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & ; 0 < x < y < +\infty \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $M_{X,Y}(t_1, t_2)$ واستنتج منها $M_X(t_1)$ و $M_Y(t_2)$.

الحل

$$M_{X,Y}(t_1, t_2) := E[e^{t_1X+t_2Y}] := \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1x+t_2y}.f_{X,Y}(x, y).dx.dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1x+t_2y}.e^{-y}, dy\,.dx = \int_0^{+\infty} e^{t_1x}.[\int_x^{+\infty} e^{(t_2-1)y}.dy]\,.dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{(t_1)x}.\left[\frac{e^{(t_2-1)y}}{t_2-1}\right]_x^{+\infty}.dx$$

وإذا كان $(t_2 - 1) < 0 \Leftarrow t_2 < 1$, وعندئذٍ :

$$M_{X,Y}(t_1, t_2) = \int_0^{+\infty} e^{t_1x}\left[-\frac{e^{(t_2-1)x}}{t_2-1}\right].dx = \frac{1}{1-t_2}\int_0^{+\infty} e^{(t_1+t_2-1)x}.dx$$

$$= \frac{1}{1-t^2}\left[\frac{e^{(t_1+t_2-1)x}}{t_1+t_2-1}\right]_0^{+\infty}$$

وإذا كان $(t_1 + t_2 - 1) < 0 \Leftarrow t_1 + t_2 < 1$ وعندئذٍ :

$$M_{X,Y}(t_1, t_2) = \frac{1}{1-t^2}\left[-\frac{1}{t_1+t_2-1}\right]$$

$$\Rightarrow M_{X,Y}(t_1, t_2) = \left(\frac{1}{1-t_2}\right)\left(\frac{1}{1-t_1-t_2}\right) \;;\; t_2 < 1\,, t_1 + t_2 < 1$$

ومنه نستنتج : $M_X(t_1) = M_{X,Y}(t_1, t_2 = 0) = \frac{1}{1-t_1} \;;\; t_1 < 1$

ونستنتج : $M_Y(t_2) = M_{X,Y}(t_1 = 0, t_2) = \frac{1}{(1-t_2)^2} \;; t_2 < 1$

الدالة المميزة لمتغير عشوائي وخواصها

تعريف ليكن Y عشوائياً كثافته الاحتمالية $f_Y(y)$, نعرف الدالة المميزة للمتغير العشوائي Y بـ :

$$\varphi_Y(t) \coloneqq E\left(e^{itY}\right) ; t \in \mathbb{R}$$

$$\coloneqq \begin{cases} \sum_{y_i \in \mathbb{R}_y} e^{ity} . f_Y(y) & ; \text{ منقطع } Y \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} . f_Y(y) . dy & ; \text{ مستمر } Y \end{cases}$$

$$\forall \, t \in \mathbb{R} \; ; i = \sqrt{-1}$$

◀**ملاحظة** بما أنَّ $\left|e^{itx}\right| = 1$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) . dx = 1$ فإنَّ :

$$|\varphi_X(x)| = 1 \; ; \; |\varphi_X(t)| \leq 1$$

مثال ليكن Y متغيراً عشوائياً له الكثافة الاحتمالية :

$$f_Y(y) = \begin{cases} C_y^n . P^y . q^{n-y} ; y = 0,1,2, \dots , n \, ; (0 < P < 1 \, ; q = 1 - P) \\ 0 \quad ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين الدالة المولدة للعزوم و الدالة المميزة لـ Y .

الحل

إنَّ لـ Y التوزيع الجدائي الثنائي بوسيطين (P, n)

$$M_Y(t) \coloneqq E\left(e^{ty}\right)$$

$$= \sum_y e^{ty} . f_Y(y) = \sum_{y=0}^{y=n} e^{ty} . C_y^n . P^y . q^{n-y} = \sum_{y=0}^{y=n} C_y^n \left(P . e^t\right) . q^{n-y}$$

وحسب منشور ثنائي حد نيوتن

$$\boxed{\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_k^n . a^k . b^{n-k}}}$$

فإنَّ $M_Y(t) = \left(P . e^t + q\right)^n$

وأيضاً إنَّ :
$$\varphi_Y(t) := E\left(e^{itY}\right)$$
$$= \sum_y e^{ity}.f_Y(y) = \sum_{y=0}^{y=n} e^{ity}.C_y^n.P^y.q^{n-y} = \sum_{y=0}^{y=n} C_y^n\left(P.e^{it}\right)^y.q^{n-y}$$

فحسب منشور ثنائي حد نيوتن نجد أنَّ :
$$\varphi_y(t) = \left(P.e^{it} + q\right)^n$$

خواص الدالة المميزة لـ Y

$$\varphi_{aY+b}(t) = e^{itb}.\varphi_Y(at) \quad (1)$$

(2) إذا كانت $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ متغيرات عشوائية مستقلة فإنَّ :
$$\varphi_{\sum_{i=1} Y_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{Y_i}(t)$$

$$\varphi_Y^k(t)\Big|_{t=0} = (i)^k.E(Y^k) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_Y'(t)|_{t=0} = i\,.E(Y) \\ \varphi_Y''(t)|_{t=0} = i^2.E(Y) = -EY^2 \\ \varphi_Y'''(t)|_{t=0} = i^3\,.E(Y) = -i.EY^3 \\ \varphi_Y^4(t)|_{t=0} = i^4.E(Y) = EY^4 \end{cases}$$

الدالة المميزة لشعاع عشوائي (X, Y)

كثافته الاحتمالية المشتركة $f(x, y)$, يعرف بـ :
$$\varphi_{X,Y}(t_1, t_2) := E\left[e^{i(t_1X+t_2X)}\right]$$
$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_x \sum_y e^{i(t_1x+t_2y)}.f(x,y) & ;\ \text{منقطع } (X,Y) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t_1x+t_2y)}.f(x,y).dx.dy & ;\ \text{مستمر } (X,Y) \end{cases}$$

انتهت المحاضرة

وبذلك نكون قد انهينا المقرر ونتمنى أن نكون قد وفقنا في عرضه بأسلوب واضح وسهل ومفهوم، فريق ♥.. Syria Math ..♥

الطوعي يتمنى لكم التوفيق والنجاح

إعداد: منى شغل**إيناس دليل** نور مهرة