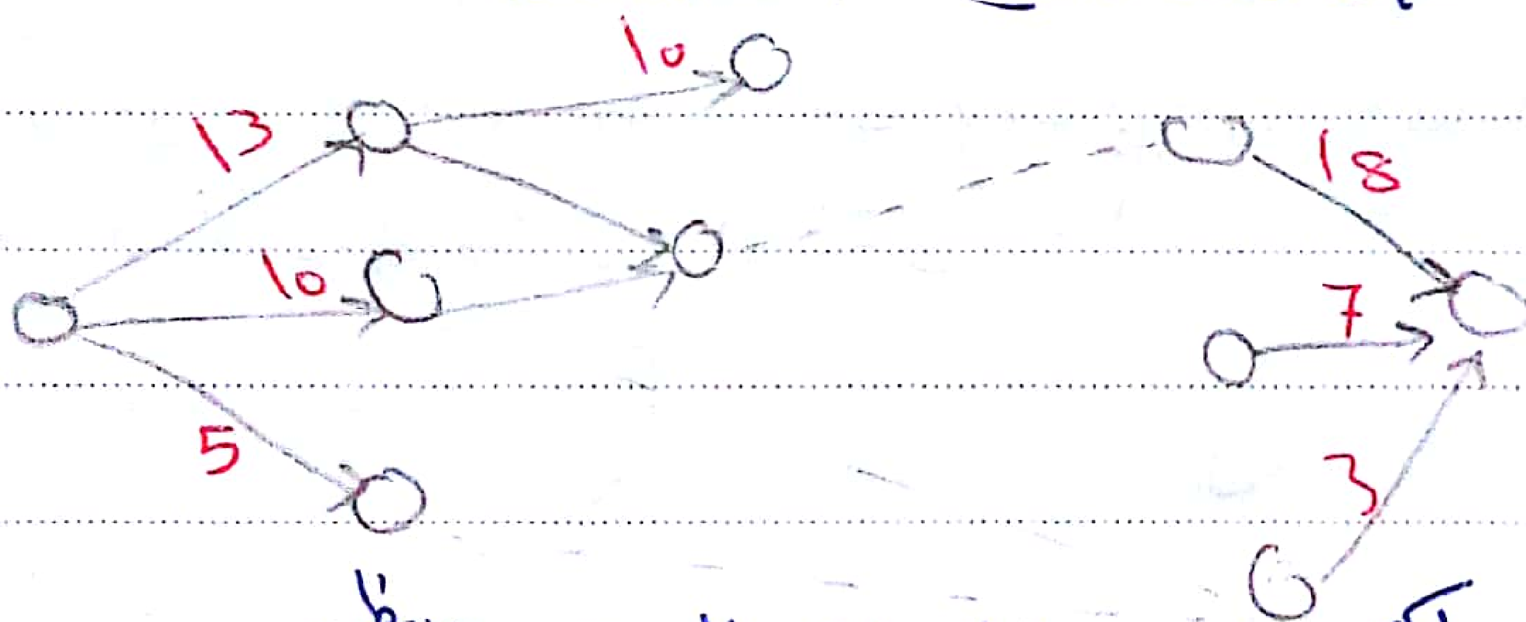
«المحاضرة التاسعة»

Net work — الشبكات

ت/ من كان لدي الشبكة التالية



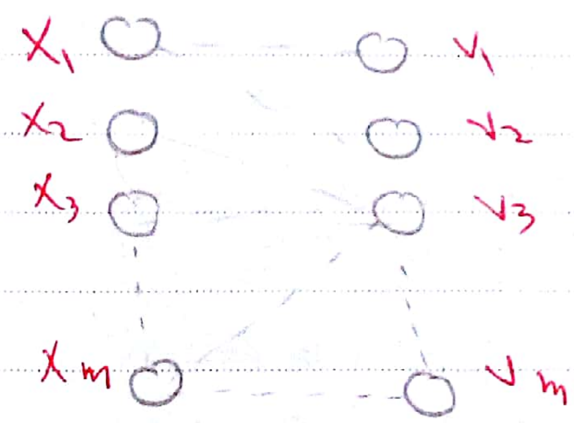
أكثر شي يهمنا مفهوم التحلل الاحادي

Decompsition of Graph تحليل البيانات

لدينا مؤسسة لديها m وظيفة المتقدمين للعمل عددهم n ، $n > m$ ، بشرط التوظيف لها ان يكون الشخص المناسب في المكان المناسب كل وظيفة يمكن ان يدخل لها اكثر من متقدم وكل متقدم يدخل لاكثر من وظيفة يمكن تمثيل هذه المسألة كبيان بحيث يكون البيان المطلوب ثنائي مجموعتين من العقد

١- وظائف

٢- المتقدمين

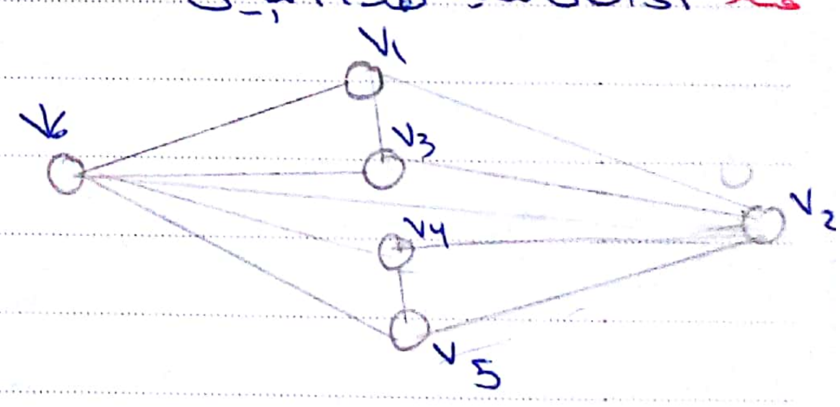


الاضلاع تمثل المتقدم المناسب للوظيفة والبيان المعطى هو بيان زوجي في النتيجة سنقوم بربط كل عقدة من المتقدمين بوظيفة (كل متقدم يرتبط بوظيفة واحدة ان امكن) (وكل وظيفة بمتقدم واحد ان امكن)

نحصل هنا الارتباط Matching of Graph (توافق هذا البيان)

تعريف التوافق: هي مجموعة الاضلاع التي تربط مجموعة العقد الاولى بمجموعة العقد الثانية والمنفصلة حتى لا يوجد ضلعين متجاورين في Matching

مثلاً اذا كان لدينا هذا البيان



توافق $M_1 = \{(V_1,V_2),(V_5,V_6)\}$

$M_2 = \{(V_5,V_4),(V_6,V_2),(V_3,V_1)\}$

$|M_2| > |M_1|$

في المثال لاحظ ان الضلع (V_1,V_2), (V_3,V_2) لانهما متجاوران

يكون اكبر ما يمكن اذا كانت التوصيلة عظمى (اعظم ما يمكن)

* الضلع الذي لا ينتمي الى التوصيلة يسمى ضلع ضعيف او ما يطلق weak respect

* العقدة التي تقع مع ضلع ضعيف تسمى عقدة ضعيفة

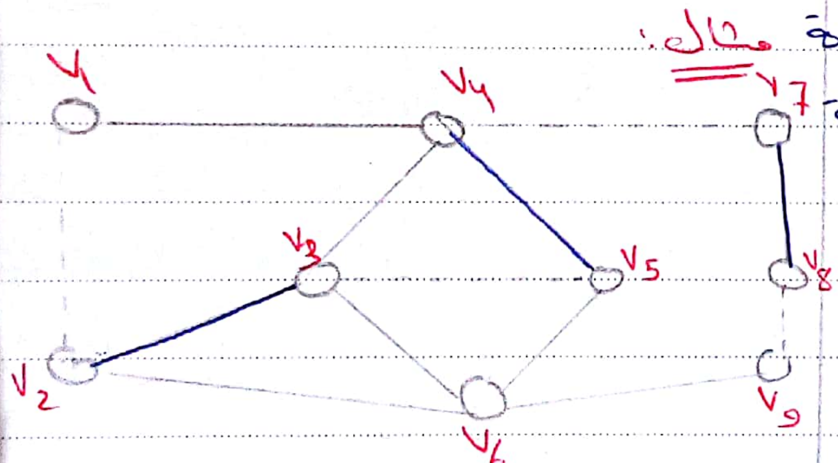
المسارات:

المسار هو مسار يتكون من اضلاع تنتمي الى توصيلة واضلاع ضعيفة يسمى المسار في هذه الحالة مسار alternative path

يسمى المسار: مسار متناوب قابل للزيادة اذا كان عقدتي طرف المسار او احداها ضعيفة

المسار قابل للزيادة هو مسار يبدأ بضلع ضعيف وينتهي بضلع ضعيف

مثال:



لنوجد التوصيلة في هذه المسألة: لتكن $M = \{(V_2,V_3),(V_4,V_5),(V_7,V_8)\}$ توصيلة

لنشكل مسار متناوب بداية ضلع ضعيف ونهاية ضلع ضعيف:

$\boxed{V_1} \to V_2 \to V_3 \to V_5 \to V_4 \to V_7 \to V_8 \to \boxed{V_9}$

عقد ضعيفة (V_1,V_9)

من تطبيقات هذه المسألة:

1- حل مسألة مسابقات الكلية

(في الحالات التي يكون لها مجموعات

/ /

الأصفار

مثال

$$A = \begin{bmatrix} x & x & \cdots & x \\ x & 0 & 0 \cdots & x \\ 0 & \cdots & \cdots & x \end{bmatrix}$$

استطيع ان ابدل حسب الأسطر والأعمدة بحيث تصبح لدينا المصفوفة ع الشكل

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|cc} x & \cdots & x & 0 & 0 \\ x & \cdots & & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & & \end{array}\right]$$

Hall's theore

The Marringe theory نظرية الزواج

اذا كان لدينا مجموعتين احدها بنات والاخرى شباب وهناك عدد من مجموعات المجموعات يهتم بالمجموعة Yes ضمن المجموعة X (غير واحد بالعكس) يكون الحل مثالي اذا كان «التوحيد» اعظم ما يمكن وعملياً البيان الموافق لهذه المسألة هو بيان ثنائي

خطوات الخوارزمية :

1. كل شاب يتقدم بعرض لأفضل اختيار له

2. الفتاة المتقدم لها عرضان او اكثر يجب ان ترفض جميع العروض باستثناء العرض الافضل بالنسبة لها علماً انه لا يوجد فتاة اي عرض

3. الشباب الذين تم رفضهم يتقدمون الى الاختيار التالي له وفي حال عدم الحصول

ع رد يستمر ع العرض نفسه

4. تكرر الخطوة الثالثة حتى نصل الى مرحلة عدم رفض اي عرض

المحاضرة العاشرة :

مثال : لكن لدينا جدول الخيارات الافضلية

M بالنسبة للشباب

الشباب	W_1	W_2	W_3	W_4
m_1	1	2	3	4
m_2	1	4	3	2
m_3	2	1	3	4
m_4	4	2	3	1

F خيارات الافضلية للبنات

	W_1	W_2	W_3	W_4
m_1	3	3	2	3
m_2	4	1	3	2
m_3	2	4	4	1
m_4	1	2	1	4

مناقشة العروض :

نتفق ع مجموعة من الرموز :

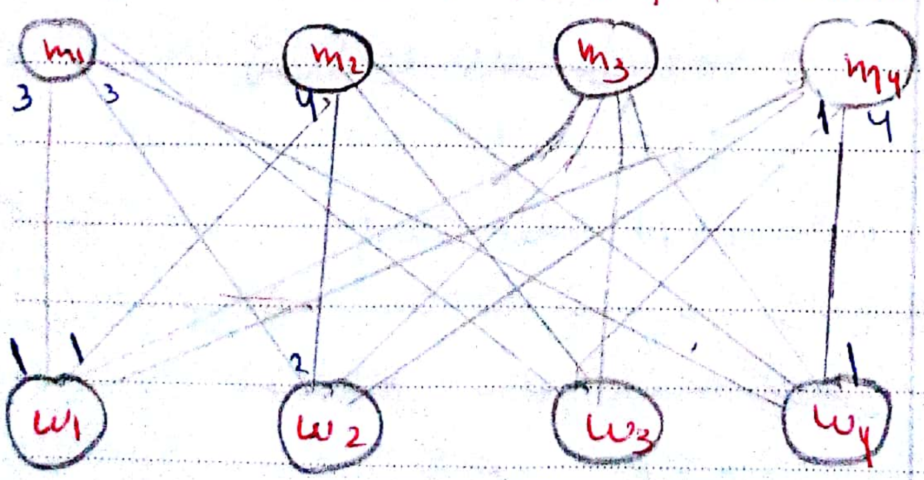
R رفض / NR عدم الرفض

A مقبول / NA عدم القبول

في حال عدم القرار نضع نفس الحرف اي R

حال عدم الرفض وعدم القبول نضع نفس الحرف

اولاً لنرسم بيان الجداول



للتماشي العروض (~~ولنا من الجدول~~) بالنسبة للذكور

P_6	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1	
3	2*	1*	1	1	1	m_1
4	4	4	4	4	1*	m_2
1	1	1	2*	2	2	m_3
2	2	2	2	4*	4	m_4

توقفنا عند P_6 لأنه أصبح لدينا استقرار والكل أصبح مقبول ونحسب لهم التوفيقة.

* حتى ارفض وننتقل الى الخيار الأصغر للمقبول الموافق لـ * في الجدول

لنناقش العروض بالنسبة للإناث:

P_6	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1	
2	2	4*	4	4	3*	w_1
3	3	3	3	3	3	w_2
4	4	4	3*	2*	2	w_3
1	2*	2	2	2	3*	w_4

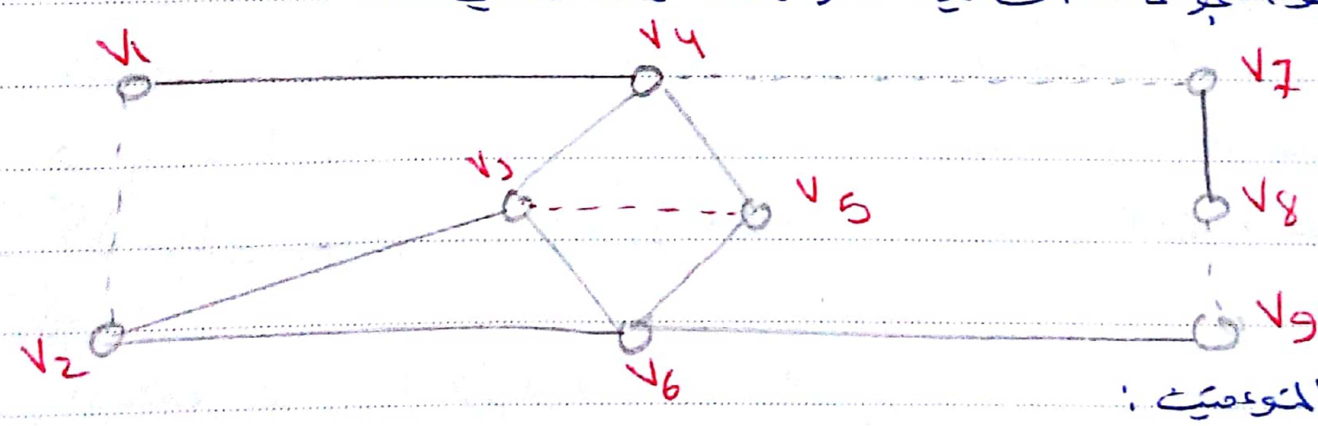
نتوقف عند P_6 لأنه أصبح لدينا استقرار والكل أصبح مقبول ونكتب لهم التوفيقة

$M_1 = \{(m_1, w_3), (m_2, w_4), (m_3, w_1), (m_4, w_2)\}$

$M_2 = \{(w_1, m_2), (w_2, m_3), (w_3, m_4), (w_4, m_1)\}$

تقاطعهما هو المجموعة الخالية (لكن هنا ليس دائماً).

مثال:



لكن لدينا التوفيقتين:

$M_1 = \{(v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_7, v_8)\}$

$M_2 = \{(v_1, v_2), (v_3, v_5), (v_4, v_7), (v_8, v_9)\}$

انا اخذنا المسار $v_1 \; v_2 \; v_3 \; v_5 \; v_4 \; v_7 \; v_8 \; v_9$

نلاحظ ان هذا المسار هو مسار زائد بالنسبة للتوفيقة M_1 كان طرفي المسار عقد منفردة

مبرهنة: ليكن $G(V,E)$ بيان بسيط وليكن M_1, M_2 مجموعتي توافق في هذا البيان عندئذ تكون مجموعة الاضلاع البيان الموسع H

$$E(H) = (M_1 - M_2) \cup (M_2 - M_1)$$

تحقق احدى ثلاث حالات:

١- عقدة معزولة

٢- دائرة زوجية متناوبة (ضلع من M_1 و الضلع الاخر من M_2)

٣- مسار متناوب طرفاه تكون عقدة ضمنية بالنسبة لاحد التوافقين

ع المثال السابق نطبقها:

$M_1 = \{(v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_7, v_8), (v_9, v_6)\}$

$M_2 = \{(v_1, v_4), (v_3, v_5), (v_2, v_6), (v_7, v_8)\}$

ان M_1, M_2 اعظميتين ان مجموعة الاضلاع للبيان الموسع H

$E(H) = (M_1 - M_2) \cup (M_2 - M_1)$
$= \{(v_1, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_3), (v_3, v_2), (v_2, v_6), (v_6, v_9)\}$

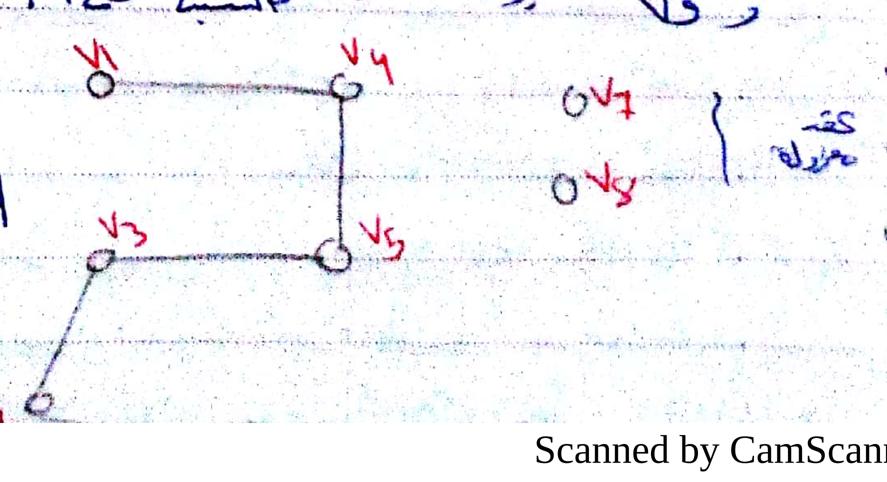
نلاحظ ان اذا اخذنا المسار

$v_1 \ v_4 \ v_5 \ v_3 \ v_2 \ v_6 \ v_9$

العقدة v_1 ضمنية الاتصال بالنسبة لـ M_1

و v_9 " " بالنسبة لـ M_2

H



حسب المبرهنة السابقة سيكون لدينا ثلاث عقد معزولة او دائرة زوجية متناوبة او مسار احدى طرفيه ضمنية الاتصال بالنسبة لاحد التوافقين.

اثبات المبرهنة:

في البيان H الموسع درجة اي عقدة فيه اصغر او يساوي 2

$\forall d \in H : \deg(d) \leq 2$

اي عقدة في هذا البيان درجتها اما 2 او 1 او 0

اذا كانت جميع العقد في هذا البيان درجتها 2 فاننا امام بيان جميع عقده زوجية اي نحن امام دائرة اذا وجد عقدة درجتها صفر تكون عقدة معزولة واذا وجد عقدة درجتها 1 تكون عقدة ضمنية بالنسبة لاحد اما لـ M_1 او لـ M_2 اذا كانت جميع العقد درجتها 0 جميعها معزولة اذا كانت جميع العقد درجتها 1

نلاحظ ان المسار المتلاحق فقط دوماً متناوبة ويكون احدى الاضلاع ينتمي الى M_1 والضلع الذي يليه لـ M_2

اذا كان المسار احدى طرفيه ليس ضمنياً بالنسبة لاحدى هاتين المجموعتين اي لكون لا طرف في المسار اذا كانت العقدة ضمنية الاتصال بالنسبة لاحدى المجموعتين وكانت درجة هذه العقدة $\deg(v) \geq 2$ عندئذ فان المسار المعطى قابل للزيادة وبالتالي فان التوافقية المعطاة ليست اعظمية ولايمكن ظهور مثل هذه الحالة لان M_1 و M_2 هي اعظمية.

مبرهنة Berge theor

لكن لدينا البيان G بيان بسيط مترابط

ولتكن M توءمة في البيان G

M اعظمية ⟺ لا يوجد مسار قابل للزيادة

الاثبات: ⟸

نفرض ان M اعظمية ولنثبت انه لا يوجد مسار قابل للزيادة من اجل ذلك نفرض جدلاً انه يوجد مسار قابل للزيادة وليكن

$P: v_0, v_1, \ldots, v_k$

(ان K عدد فردي كائة مسار قابل للزيادة)

نعرف مجموعة تواءمة M_1 هي المجموعة

$M_1=(M-\{v_1v_2,\ldots,v_{k-2}v_{k-1}\})$

$\cup\{v_0v_1, v_2v_3,\ldots,v_{k-1}v_k\}$

ان M_1 هي عبارة عن توءمة في البيان G جميع اضلاعها مستقلة مثنى مثنى

$|M_1|=|M|+1$

وهذا ينافي كون M اعظمية

⟹ اذا كان البيان لا يحوي مسار قابل للزيادة لنثبت ان التوءمة اعظمية

M توءمة في G ولنفرض انه لا يوجد مسار زيادة في البيان G بالنسبة للتوءمة M

اي وهاكن L مسار فان L ليس مسار زيادة

لنفرض ان M ليست اعظمية ولتكن M_1 توءمة اعظمية في البيان G عندئذ يكون البيان المسع

$E(H)=(M-M_1)\cup(M_1-M)$

ان مجموعة اضلاع البيان المسع H هي عبارة اما عقدة معزولة او دائرة او مسار قابل للزيادة (حسب المبرهنة السابقة) اما بالنسبة لـ M_1 او بالنسبة لـ M

ان M_1 اعظمي حسب الفرض وبالتالي فان M_1 يحوي ضلع زائد عن اضلاع M (M_1 تحوي اضلاع اكثر من M) وبالتالي فان المسار المعطى يجب ان يكون مسار زيادة بالنسبة لـ M وهذا ينافي الفرض كون البيان لا يحوي اي مسار زيادة وبالتالي M اعظمية.

مبرهنة Halls Theor :

في البيان ثنائي التجزئة (زوجي)

$G=(X,Y,E)$

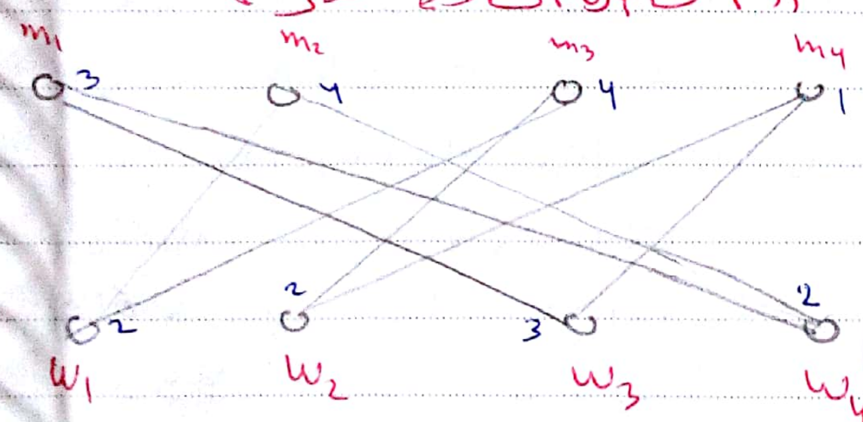
$e\in E: e(x,y);\ x\in X, y\in Y$

فان اي عقدة من X تكون متزوجة بعقدة من Y اذا وفقط اذا كانت مايلي

$|S|\le|N(S)|$ مهما $S\subseteq Y$

عدد عناصر مجاورة

«الظاهرة الحادية عشر»



اوجد دائرة هاملتون الاساسية

التدفق والشبكات (تطبيقات نظرية البيان)

في كل شبكة لدينا عقدة نسميها عقدة المصدر Source vertex (المنبع) لا يدخلها اي قوس وكل شبكة فيها عقدة هدف Sink vertex (مصب) لا يخرج منها اي قوس الهدف من هذه المسائل ايجاد التدفق الاعظمي في الشبكة هذا

ان الشبكة تحقق الشروط التالية:

1- لا تملك دائرة مغلقة

2- عقدة منبع واحدة عقدة مصب واحدة (في حال وجود أكثر من مصدر نضيف عقدة مصدر وهمية تكون أساس العقد المصدر الحقيقية)

3- ان تحوي الشبكة عقدة هدف واحدة (في حال وجود أكثر من هدف نضيف عقدة هدف وهمية).

نرمز للشبكة ND حيث:

$NG = ND = (V, E, S, t, cap)$

عقد ، اقواس ، مصدر ، هدف ، سعة الأقواس

وبالتالي كل قوس بالشبكة يحدد بعدد حقيقي يمثل سعة القوس مثل: $cap(e_5)=4$

في حال وجود رقمين على القوس الرقم اليساري يدل على سعة القوس والرقم اليميني يدل على كمية التدفق في هذا القوس وإلا إذا اشتملنا ذلك

وبذلك نكون امام حالة مثالية للشبكة اذا كان التدفق مساوي للسعة

لكل عقدة داخلية (ليست منبع ولا مصب) في الشبكة يدخل اليها بعض الأقواس ويخرج منها بعض الأقواس نرمز بـ (+) للأقواس الداخلة وبـ (-) للأقواس الخارجة

اذا كانت $V \in ND: indegre(V) =$ عدد الأقواس الداخلة في V

$out\ degre(V) =$ عدد الأقواس الخارجة من V

حيث لدينا درجتين درجة داخلية ودرجة خارجية

نعرف التدفق في الشبكة ND رياضياً

ان هذه الدالة تكون معرفة على مجموعة الأقواس بحيث يكون $\forall \vec{e} \in \vec{E} : f(\vec{e}) \le cap(\vec{e})$

ومهما تكن العقدة الداخلية في هذه الشبكة تحقق العلاقة التالية

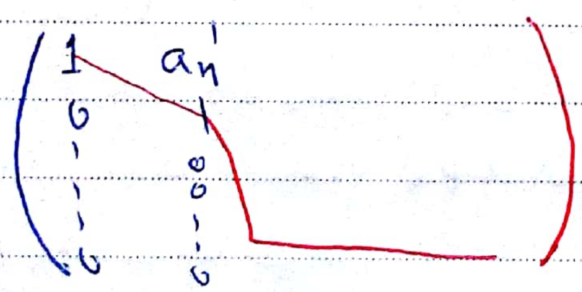
$\forall V \in ND: V \ne S \wedge V \ne t$

$$\rightarrow \sum_{e \in indegre(v)} f(\vec{e}) - \sum_{e \in outd(v)} f(\vec{e}) = 0$$

اذاً: نستنتج ان التدفق هو عملية الجريان ضمن اقواس الشبكة بشكل السعي لتحقيق تدفق أكبر كمية يمكن نقلها عبر اقواس الشبكة اذا لا يمكن للتدفق ان يكون أكبر من السعة

توجد عدة خوارزميات لايجاد التدفق الأعظمي في أي شبكة وذات كلفة حسابية مقبولة

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$



A_{n*n}

$O(n) = n^{\frac{3}{2}}$

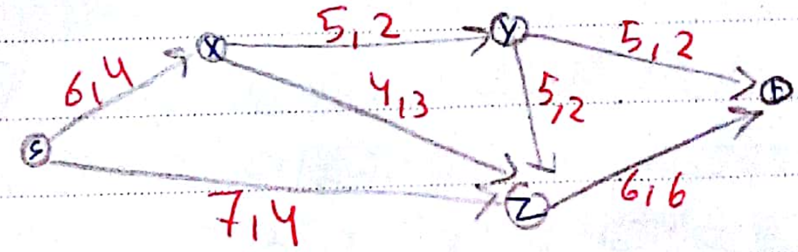
التدفق والمقاطع في الشبكات

Flows and Cuts in Network

ان شبكات نقل النفط هي نموذج عن مثال الشبكات وايجاد التدفق الأعظمي حيث الأنابيب تمثل الأقواس ويوجد مجموعة من هذه الشبكة حيث يتم توزيع التدفق من انابيب

اعطى كل انبوب لسعة محددة ملائمة لايجاد التدفق الاعظمي
الكمية المتدفقة من هذا الانبوب ودوماً
تكون بشبكات نقل النفط من شبكات وحيدة
المصدر ووحيدة المصب لخطوط النفط المصدر
تكون درجة الخروج اكبر من صفر والداخلية
صفر بينما المصب عكس ذلك.

لان لدينا البيان التالي:



اوجد التدفق الاعظمي من هذه الشبكة

توجيه: نبحث من هذه الشبكة عن مسارات زيادة
التدفق ونبحث عن افضل عرض لهذه
المسارات

خوارزمية ايجاد مسار الازدياد:

١- ضع في البداية عقدة المصدر s
٢- رقم الرأس s بالرقم صفر
٣- ابدأ من ١
٤- بما المجموعة V لا تحوي عقدة المصب كرر ايجاد
جميع المسارات من عقدة المصدر الى عقدة
المصب وفق مايلي:
أ- اذا كانت هناك قوس يمكن زيادة تدفقه
اقل بترقيم
ب- اذا كان الرأس لا يساوي رأس الاخر
ناتج هذا الرأس كعقدة نهاية القوس
ج- اعطي هذا الرأس رقم
د- صنف هذا الرأس الى مجموعة الرؤوس
السابقة

سنطبق هذه الخوارزمية على المثال السابق

« المحاضرة الثانية عشر »

الشبكة هي $N(V,E,s,t,cap)$
اذا كان f التدفق للشبكة و cap
سعة التدفق
اذا كانت الشبكة محددة اقواسها بسعة سميناها
شبكة سعوية $f \leq cap$
F^* التدفق الاعظمي فيكون $f \leq F^*$

Maximum flow تدفق اعظمي

ان في 1962 اول من عمل في التدفق
الاعظمي Ford Fulkerson
و في Dinic 1972
اي شبكة يجب ان يكون عليها تدفق ابتدائي
او سعة ثم نبني التدفق الاعظمي عليها

التدفق والقطع واقواس القطع في الشبكة:
Flows & cuts in Network

الشبكة التي هنا يجب التوجه الى عقدة مصدر
واحدة وعقدة مصب واحدة اي يجب
ان تكون وحيدة المصدر ووحيدة المصب في
حال وجود اكثر من مصدر نضيف مصدر وهمي
وفي حال وجود اكثر من هدف نضيف هدف
وهمي

لتكن $N(V,E,s,t)$ ولتكن
$X, Y \subseteq V : X \cap Y \neq \emptyset$ مجموعة عقد
عندئذ توجد في X مجموعة رؤوس وفي Y
مجموعة رؤوس وبالتالي توجد مجموعة
اقواس منطلقها X ومستقرها Y

$\langle X,Y\rangle = \{\vec{e} \in \vec{E}, \vec{e} = [x,y];\ x \in X, y \in Y\}$

$\langle Y, X\rangle = \{\vec{u} \in \vec{E} ; \vec{u} = [y,x] ; y \in Y ,\ x \in X\}$

يمكن ان تمثل الشبكة الاعتبارية عند دالة $f : \vec{E}_N \to \mathbb{R}^+$ منطقية

الشبكة تحقق شرطين :

1- شرط السعة :

$\forall \vec{e} \in \vec{E} : f(\vec{e}) \le cap(\vec{e})$

2- شرط الحفظ الوراثية .

$\forall v \in \vec{V} \quad , v \neq s \ , \ v \neq t$

فان $\displaystyle\sum_{\vec{e} \in ind(v)} f(\vec{e}) = \sum_{\vec{e} \in out(v)} f(\vec{e})$

كل عقدة لها درجة داخلية ودرجة خارجية

$ind(v) , out(v)$

كمية التدفق في الشبكة : 83

نرمز له بالرمز $Val(f)$ وهي عادة

هي التدفق من عقدة المصدر

$Val(f) = \displaystyle\sum_{\vec{e} \in out(s)} f(\vec{e}) - \sum_{\vec{e} \in ind(s)} f(\vec{e})$

عادة يكون مساوي الصفر

التدفق الاعظمي :

هو اكبر كمية يمكن ارسالها وفق الشبكة

$Val(f) \le Val(f^*)$

كمية التدفق بشكل عام هي اصغر او تساوي من

كمية التدفق الاعظمي

اقواس القطع :

تعريف : لتكن لدينا الشبكة $N(V, \vec{E}, s, t)$

ولكن لدينا المجموعتين $V_s , V_t \subseteq V$:

$V_s \cap V_t = \emptyset \wedge V_s \cup V_t = \vec{V}$

فاقواس القطع هي مجموعة الاقواس التي

مصدرها V_s ومستقرها V_t

$\langle V_s , V_t\rangle$

اقواس الراجعة للشبكة : هي $\langle V_t , V_s\rangle$

مثال :

$V_s = \{s, x, z\} , \ V_t = \{y, t\}$

اقواس القطع هي :

$\langle V_s , V_t\rangle = \{[x,y] , [z,t]\}$

$\langle V_t , V_s\rangle = \{[y,z]\}$ اقواس راجعة

ملاحظة : اذا كان $N(V, \vec{E}, s, t)$

(كون الشبكة لا تحوي اضلاع)

$|\vec{E}| \le (|\vec{V}| (|\vec{V}| - 1))$

سهلة ما سبق اذا اخذنا

$V_s = \{s\}$

$V_t = \{V - s\}$

كمية التدفق في هذه الحالة

$Val(f) = \displaystyle\sum_{\vec{e} \in \langle V_s , V_t\rangle} f(\vec{e}) - \sum_{\vec{e} \in \langle V_t , V_s\rangle} f(\vec{e})$

مبرهنة : لتكن لدينا $N(V, \vec{E}, s, t)$ من

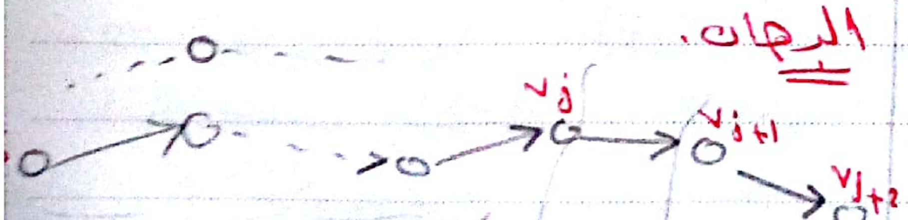
$V_s \cap V_t = \emptyset \wedge V_s \cup V_t = \vec{V}$

عندئذ اي مسار موجه P في الشبكة يربط

s ب t يحوي على الاقل قوس

$\vec{e} \in \langle V_s , V_t\rangle$

البرهان :



$V_s = \{s, \dots, v_j\}$

$V_t = \{v_{j+1}, \dots, v_t\}$

الاثبات :

اذا عقدة في المجموعة V_s وتنتمي الى المسار P هي V_j واول عقدة في المجموعة V_t وتنتمي الى المسار P هي V_{j+1} اذا الموس

$$[V_j , V_{j+1}] \in \langle V_s , V_t \rangle$$

P مسار معرفة بالشكل

$$P = \langle s, V_1, \ldots, V_j, V_{j+1}, \ldots, V_t \rangle$$

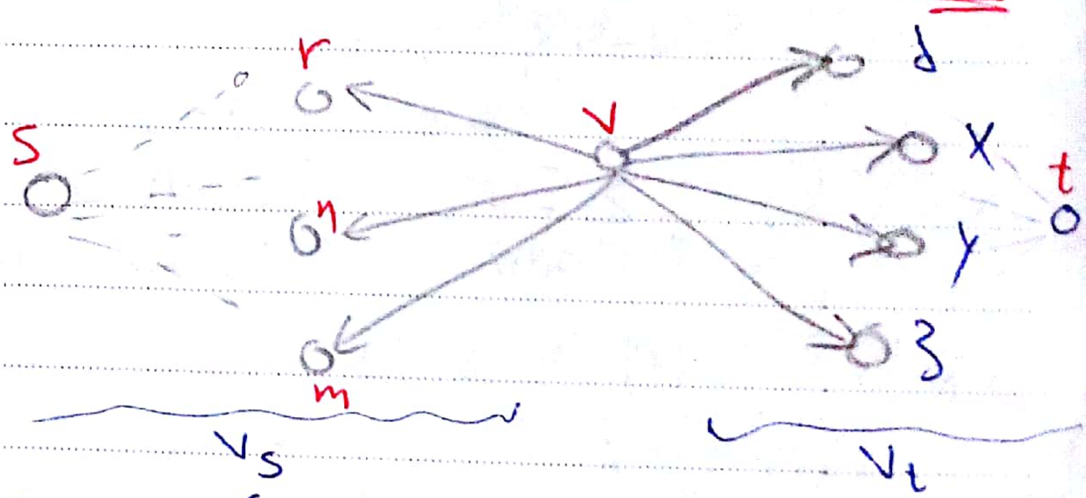
مبرهنة :

لكن لدينا الشبكة $N = (V, \vec{E}, s, t)$
حيث $V_s, V_t \subseteq V$, $V_s \cap V_t = \emptyset$, $V_s \cup V_t = V$
ولكن مجموعة اضلاع القطع ما كان هي $\langle V_s , V_t \rangle$ من اجل اي عقدة $V \in V_s$
فان ما يلي محقق

① $\bigcup_{V \in V_s} out\, d(V) = \langle V_s , V_s \rangle \cup \langle V_s , V_t \rangle$

② $\bigcup_{V \in V_s} in\, d(V) = \langle V_s , V_s \rangle \cup \langle V_s , V_t \rangle$

مثال :



الاقواس الخارجة من V_s الى V_t عددها 4
اي $|\langle V_s , V_t \rangle| = 4$
و $|\langle V_t , V_s \rangle| = 3$

نتيجة : لكن لدينا $N(V, \vec{E}, s, t)$ ولكن احد اقسام القطع هي $\langle V_s , V_t \rangle$ عندئذ تكون كمية التدفق تحقق العلاقة

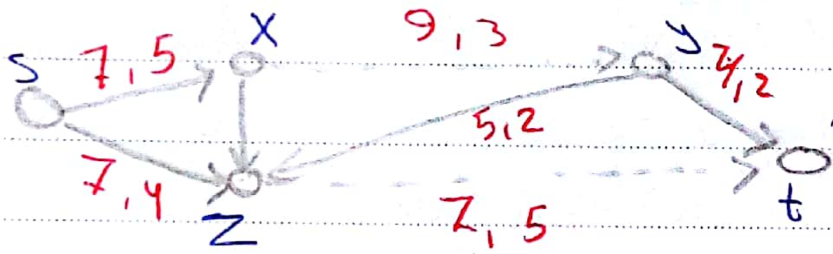
$$Val(f) = \sum_{e \in \langle V_s , V_t \rangle} f(\vec{e}) - \sum_{e \in \langle V_t , V_s \rangle} f(\vec{e})$$

اثبت ذلك

توضيح : التدفق الكلي بالمنبع
المصدر = مجموع الاقواس الخارجة
منها - " " الداخلة إليها

دمج شرط المحافظة التدفق = 0 وستخدم ① و② ذلك النتيجة

مثال عن المبرهنة السابقة :



$V_s = \{s, x, z\}$, $V_t = \{t, y\}$

او مجموع التدفق في الشبكة

$$Val(f) = (3+5) - 2 = 6$$

التدفق الاعظمي والقطاع الصغرى :

Maximal flow and Minimal cut in Network

لكن لدينا الشبكة $N(V, \vec{E}, s, t)$
$V_t, V_s \subseteq V$, $V_s \cap V_t = \emptyset$
$V_s \cup V_t = V$

ولكن $\langle V_s , V_t \rangle$ عدد فان مجموع سعات القطاع يساوي مجموع التدفق

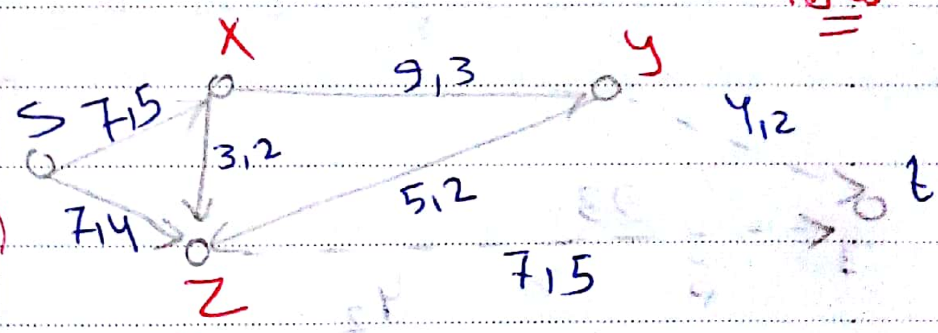
$$Cap\langle V_s , V_t \rangle = \sum_{\vec{e} \in \langle V_s , V_t \rangle} f(\vec{e})$$

هذه المعادلة صحيحة بشكل عام

قاطعة الصغرى في الشبكة:

هي القاطعة التي لأطرافها أقل سعة، أي أقل تدفق.

مثال:



$V_s = \{s, x, z, y\}$

$V_t = \{t\}$

عندئذ نلاحظ أن

$min = 11$

نأخذ كل الحالات ونختار الصغرى:

نأخذ [illegible] الأقواس لأجل

$(7+9 = 16)$

نتيجة: كمية التدفق أصغر أو يساوي السعة

$Val(f) \le cap\langle V_s, V_t \rangle$

نعوض عن [illegible]

ملاحظة:

تكون التدفق أعظمي إذا كان مساوي لسعة مجموعة قطع حيث مجموعة قطع تكون الصغرى.

$Val(f) = cap(L)$

حيث L مجموعة أقواس قطع الصغرى.

التدفق بشكل عام:

$$f(\vec{e}) = \begin{cases} cap(\vec{e}); & \vec{e} \in \langle V_s, V_t \rangle \\ 0 & ; \vec{e} \notin \langle V_s, V_t \rangle \end{cases}$$

إيجاد التدفق الأعظمي باستخدام مسار موجه من منبع البداية إلى النهاية:

مسار الزيادة الموجه يعرف كالتالي:

$$Val(f) = \sum_{\vec{e} \in out(s)} f(\vec{e}) - \sum_{\vec{e} \in in(s)} f(\vec{e})$$

أو

$$Val(f) = \sum_{\vec{e} \in in(t)} f(\vec{e}) - \sum_{\vec{e} \in out(t)} f(\vec{e})$$

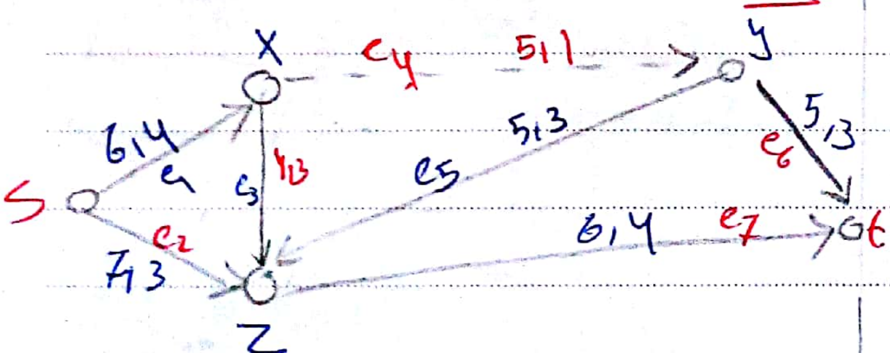
هو مسار يمكن زيادة التدفق عليه لجميع الأقواس بحيث كان عدد كمية التدفق الممكنة للمسار (السعة)

إذا هذه الكمية المطلوبة هي أصغر قيمة من حاصل طرح كمية التدفق عن السعة من كل قوس

$P = \langle s, \vec{e}, v_1, \dots, v, \vec{e}_n, t \rangle$

$\min_{i=1\dots n} \{cap(\vec{e}_i) - f(\vec{e}_i)\}$

مثال: لتكن لدينا الشبكة التالية:



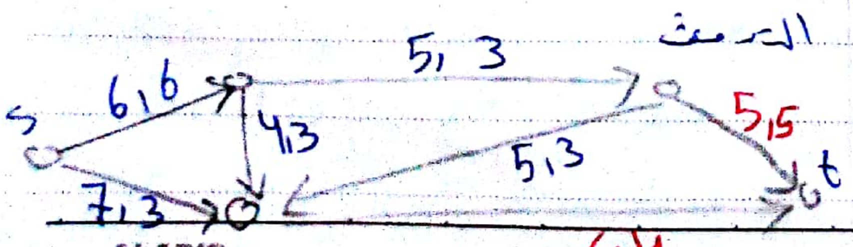
لنأخذ

$P_1 = \langle s, \vec{e}_1, x, \vec{e}_4, y, \vec{e}_6, t \rangle$

كمية الزيادة عبر هذا المسار

$\min\{6-4, 5-1, 5-3\} = 2$

فالشكل النهائي للشبكة بعد زيادة 2 ← التدفق

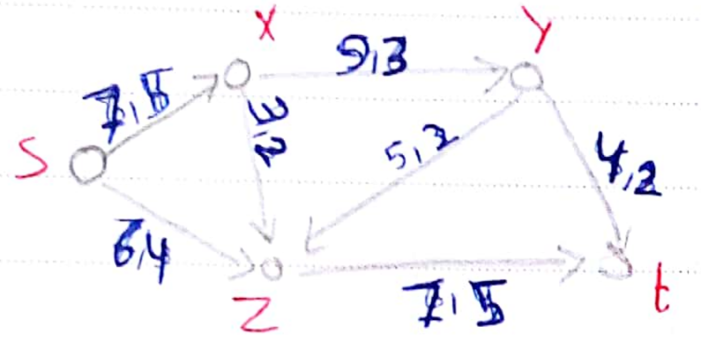


$\mathrm{cap}(L) \leq \mathrm{cap}(K)$

— لكن التدفق الأعظمي f^* و K قاطعة صغرى

$\mathrm{Val}(f^*) < \mathrm{cap}(K)$

مثال: لكن لدينا البيان التالي:



$\mathrm{cap}<s, V_{n-s}> = 13$

$\mathrm{cap}<\{s,x\},\{y,z,t\}> = 18$

$\mathrm{cap}<\{s,x,z\},\{y,t\}> = 16$

$\mathrm{cap}<\{s,x,y\},\{z,t\}> = 18$

$\mathrm{cap}<\{s,x,y,z\},t> = 11$

قاطعة صغرى

$\mathrm{Val}(f_s) = 9 \leq 11$

$\mathrm{Val}(f_t) = 7 \leq 11$

مبرهنة: لكن لدينا شبكة N و

لكن لدينا V_t, V_s بحيث يكون تجزئة

لمجموعة البيان $V_t \cap V_s = \emptyset$

$V_t \cup V_s = V$ ، f تدفق ع N ،

1) $\mathrm{Val}(f) = \sum_{\vec{e} \in <V_s,V_t>} f(\vec{e}) - \sum_{\vec{e} \in <V_t,V_s>} f(\vec{e})$

سعة قاطعة

يمكن لدينا $\mathrm{Val}(f) \leq \mathrm{cap}(V_s,V_t)$

الاثبات:

$\mathrm{Val}(f) = \sum_{\vec{e} \in <V_s,V_t>} f(\vec{e}) - \sum_{\vec{e} \in <V_t,V_s>} f(\vec{e})$

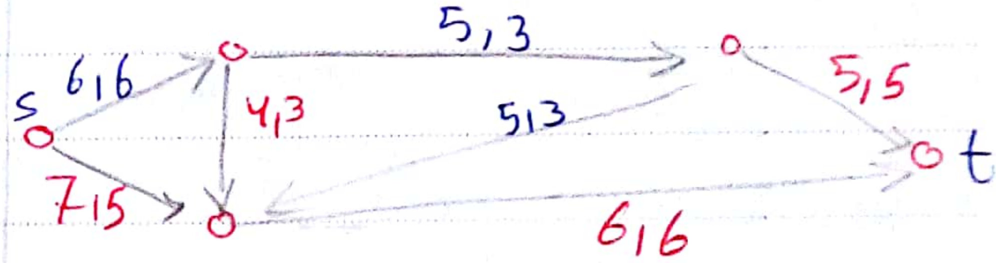
$\leq \mathrm{cap}<V_s,V_t> - \sum_{\vec{e} \in <V_t,V_s>} f(\vec{e})$

$\leq \mathrm{cap}<V_s,V_t>$

$P_2 = <s, \vec{e_2}, t, \vec{e_7}, t>$

$\min\{7-3, 6-4\} = 2$

صوالي دفع هذا المسار تساوي 2



صوالتدفق هنا هي 11

الملاحظة التالية عشر

كمية التدفق f:

1) $\mathrm{val}(f) = \sum_{\vec{e} \in \mathrm{out}(s)} f(\vec{e}) - \sum_{\vec{e} \in \mathrm{in}(s)} f(\vec{e})$

2) $\mathrm{val}(f) = \sum_{\vec{e} \in \mathrm{in}(t)} f(\vec{e}) - \sum_{\vec{e} \in \mathrm{out}(t)} f(\vec{e})$

اذا كان $\mathrm{val}(f)$ عند ① 8 سيساوي $\mathrm{val}(f)$

عند ② نأخذ القيمة الأصغر بينهما

التدفق الأعظمي Maximum flow f^*

وهاكن f تدفق ع الشبكة تكون:

$\mathrm{Val}(f) \leq \mathrm{Val}(f^*)$

التدفق الأعظمي هو أكبر كمية تدفق ممكنة

سعة القاطعة:

$\mathrm{cap}<V_s,V_t> = \sum_{\vec{e} \in <V_s,V_t>} f(\vec{e})$

القاطعة الصغرى Minimum cut

هي القاطعة التي سعتها أصغر سعة القاطع الأصغر في الشبكة

— لكن K قاطعة ما ع الشبكة ولكن L قاطعة صغرى. نبرهن

$Val(f) \leq cap\langle V_s, V_t\rangle$

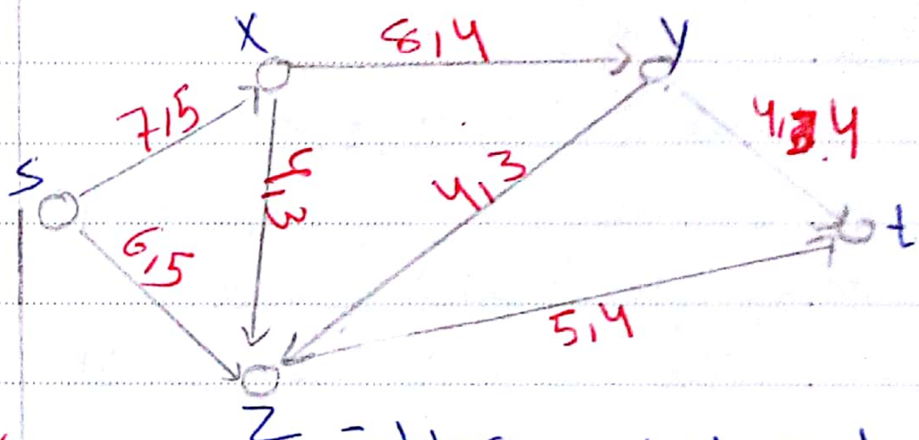
نتيجة: يكون التدفق f^* مثاليا اذا كان التدفق الممكن يساوي سعة القاطعة الصغرى.

f^* مثالي اذا كان: K^* قاطعة صغرى

$Val(f^*) = cap(K^*)$

نتيجة: N شبكة و f تدفق عليها اذا كانت قاطعة والتدفق الممكن يساوي سعة القاطعة فان f تدفقاً اعظمياً و K قاطعة صغرى

مثال: لتكن لدينا الشبكة التالية



اوجد اصغر سعة قاطعة

الحل:

$$cap\langle\{s,x,y,z\},\{t\}\rangle = 9 = \sum_{\vec{e} \in \langle\{s,x,y,z\},t\rangle} f(\vec{e})$$

بشكل عام التدفق له حالتين:

$$f(\vec{e}) = \begin{cases} cap & : \vec{e} \in \langle V_s, V_t\rangle \\ 0 & \vec{e} \in \langle V_t, V_s\rangle \end{cases}$$

حل مشكلة التدفق الاعظمي باستخدام تدفق مسار الزيادة

Maximum flow Proplem by using Augmintation Path

لتكن لدينا الشبكة N ولتكن P مسار من s الى t

$P = \langle s, \vec{e}_1, v_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k, t\rangle$

ملاحظة:

$\forall \vec{e}_i \in P \quad f(\vec{e}_i) \leq cap(\vec{e}_i)$

$i = 1, \dots, k$

$\forall \vec{e}_i \in P : \vec{e}_i = [v_i\ v_{i+1}]$

Farc سنعتبره قوس امامي

اضافة كمية لتدفق (المقوس) المسار على كل قوس بحيث لا يتجاوز السعة العرس.

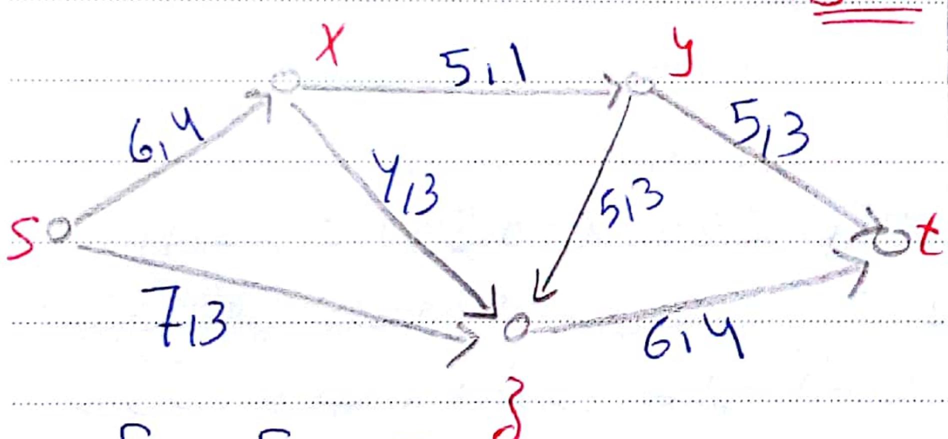
شرط اضافة الشبكة:

الكمية المراد اضافتها يجب ان تحقق العلاقة التالية

$$\max \Delta P = \underset{\vec{e}_i \in P}{Min}\{cap(\vec{e}_i) - f(\vec{e}_i)\}$$

اعظم كمية ممكنة

مثال:

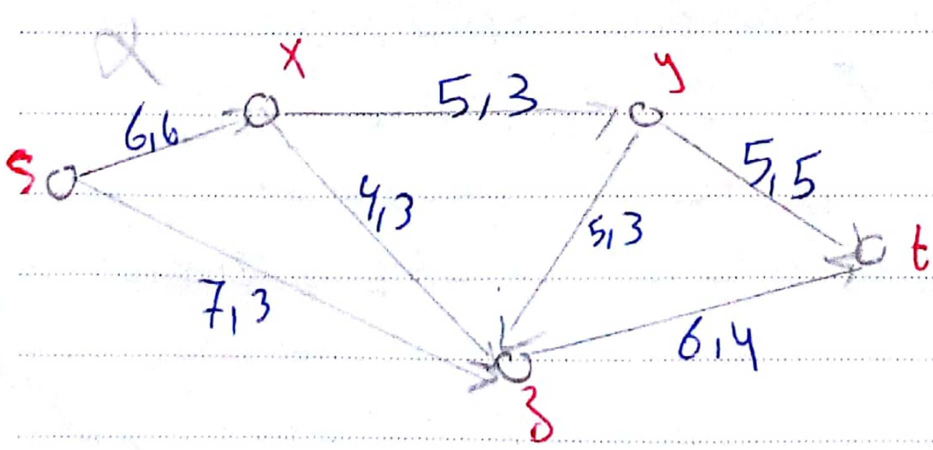


$f_t = f_s = 7$

لناخذ مسار ولنحسب كمية الزيادة:

$P_1 = \langle s, x, y, t\rangle$

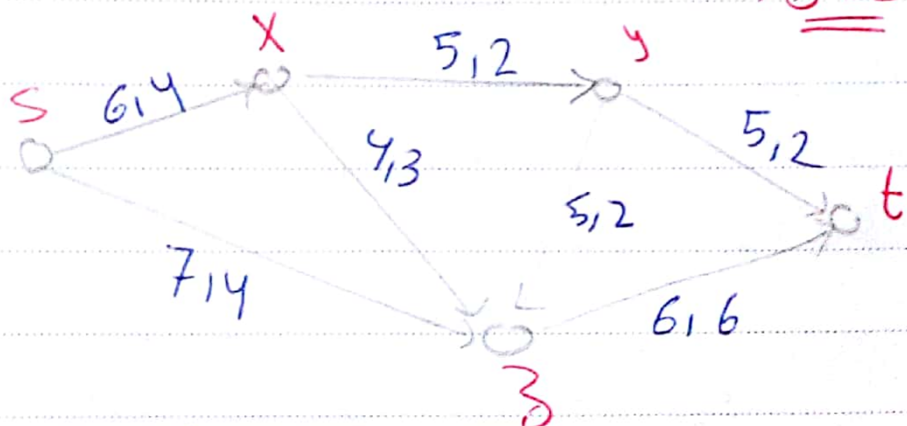
$\max \Delta P_1 = Min\{6-4, 5-1, 5-3\} = 2$



المطلوب حساب تدفق المسبب باستخدام شبه المسار:

$$f = \begin{cases} f(\vec{e}) + \Delta Q & : \vec{e} \in Farc \\ F(\vec{e}) - \Delta Q & ; \vec{e} \in Barc \\ 0 & : \vec{e} \notin Q \end{cases}$$

مثال:



تدفق $f = 8$

$Q_1 = \langle s, z, y, t \rangle$

الأشعة المضافة

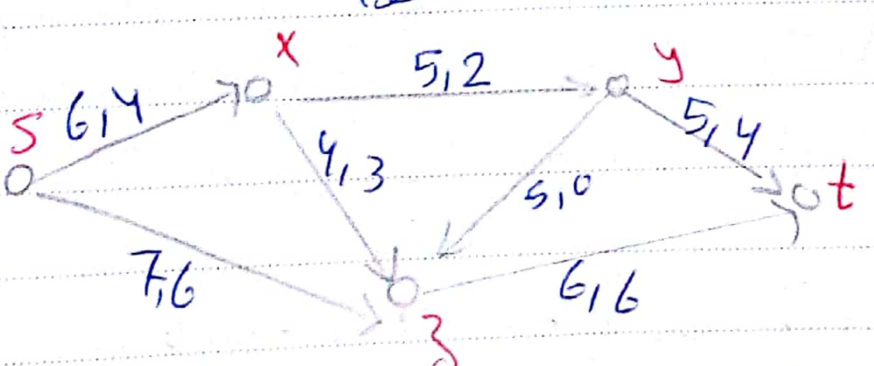
لا يمكن للتدفق ان يكون سالب، حساب التدفق وفق ما يلي: نجد ما يلي:

$$\Delta \vec{e} = \begin{cases} cap(\vec{e}) - f(\vec{e}) & ; \vec{e} \in Farc \\ F(\vec{e}) & : \vec{e} \in Barc \\ 0 & \text{غير موجود ضمن المسار} \end{cases}$$

$$Max\ \Delta Q = \min_{\vec{e} \in Q} \{\Delta \vec{e}\}$$

$$Max\ \Delta Q = \min\{3, 2, 3\} = 2$$

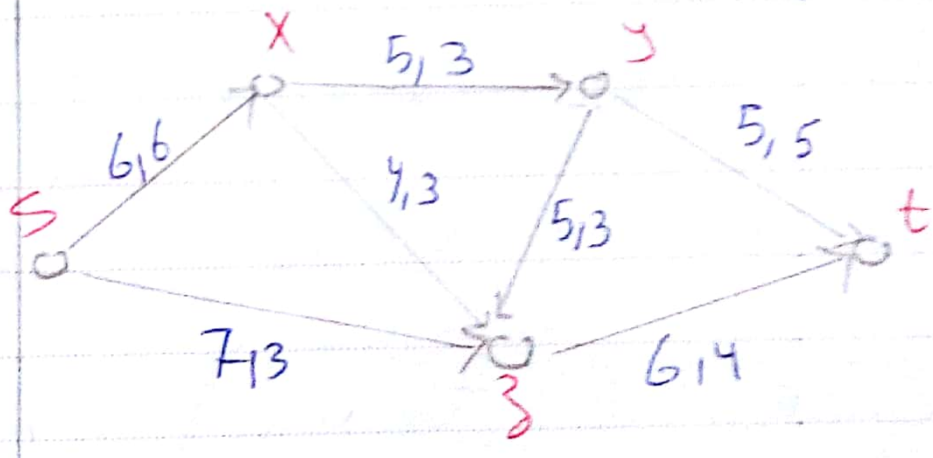
نعوض بالجملة ثالث الدعم



كان تدفق بسبب زيادة بمقدار 2

$f = 10$

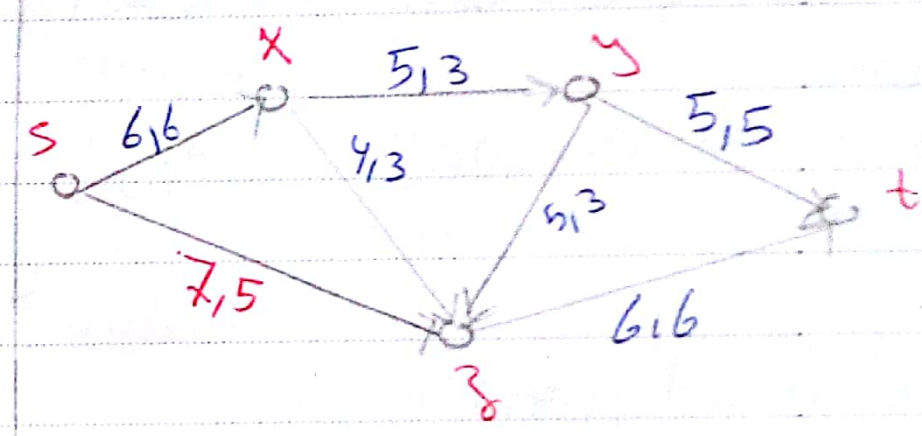
نبحث عن مسار لـ تدفق أكبر



تدفق $f = 9$

$P_2 = \langle s, z, t \rangle$

$Max\ \Delta P_2 = \min\{7-3, 6-4\} = 2$



$f = 11$

$cap \langle \{s, x, y, z\}, t \rangle = 11$

نبحث جميع المسارات الأمامية التي تنطلق من s وتستقر بـ t ونجري عملية أكبر زيادة ممكنة لهذه المسارات عندها نحصل على التدفق الأعظمي.

شبه مسار الزيادة للتدفق ، سلبية مسار التدفق : لا يمكن كل الأقواس بنفس الاتجاه لكن

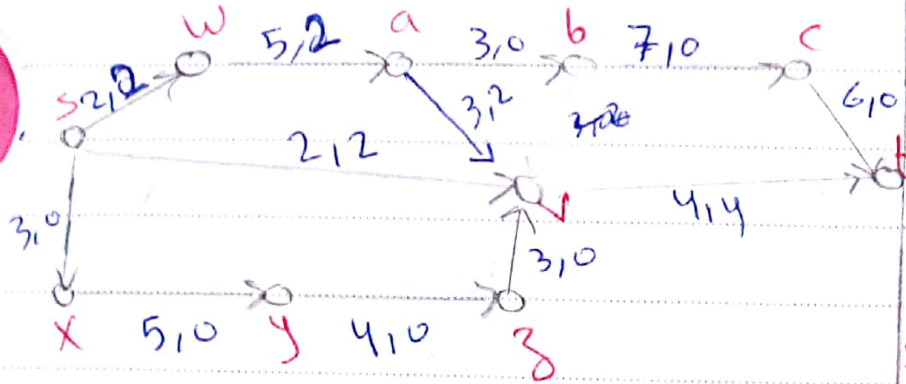
$P = \langle s, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, t \rangle$

$\exists\ \vec{e}_i \in Q : \vec{e}_i\ [v_i, v_{i-1}]$

Barc قوس خلفي

$\exists\ \vec{e}_i \in Barc \wedge \exists\ \vec{e}_l \in Farc$

خلفي أمامي



$Q_1 = \langle s, x, y, z, v, a, b, c, t \rangle$

$\Delta Q_1 = \min\{3-0, 5-0, 4-0, 3-0, 2, 3-0, 7-0, 6-0\} = 2$

للقوس الخامس نطرح 2 وبالباقي نجمع 2

التدفق الأعظمي يساوي 6 (4+2) ولنوجد القاطعة

الأصغري (يجب أن يكون التدفق يساوي السعة)

$V_s = \{s, x, y, z, v\}$

$V_t = \{w, a, b, c, t\}$

قاطعة أصغرية $\langle V_s, V_t \rangle$

$Val(f) = cap\langle V_s, V_t \rangle$

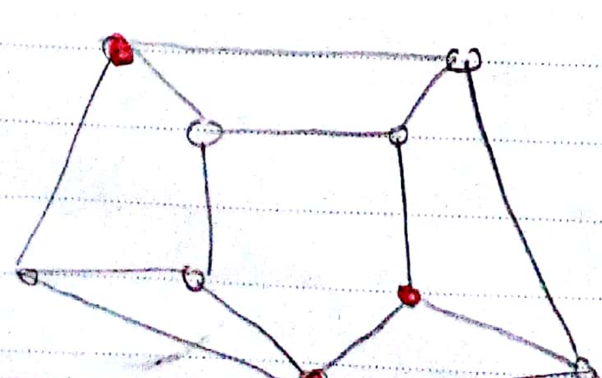
$6 = 6$ (سؤال: شكل رسمه)

سؤال: في رقعة الشطرنج أوجد مسار الحصان من منطقة ويعود إلى منطقة ويمر على كل مربع بدون تكرار وكم طريقة يمكن رسم هذا المسار

ج: ما هو العدد الأقل من الوزراء بحيث يغطي الرقعة كاملة ولا أحد يؤثر ع الآخر.

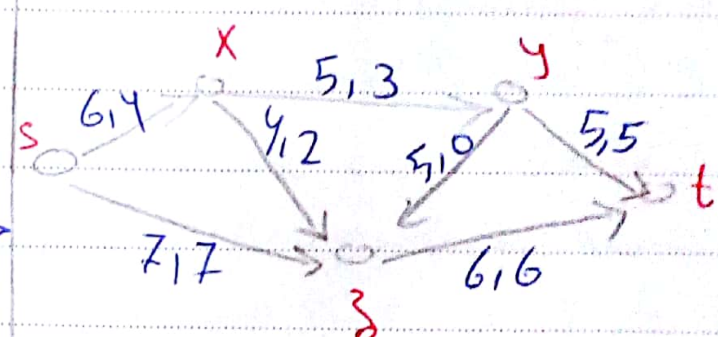
يسمى هذا المفهوم مفهوم السيطرة (سيطرة البيان) يا أما سيطرة عقدة إذا اعتبرنا كل مربع يقابل عقدة. المطلوب في مثل هذه المسألة إيجاد عدد السيطرة في البيان الموافق لهذه المسألة.

مثال:



$Q = \langle s, z, x, y, t \rangle$

$Max\,\Delta Q_2 = \min\{1, 3, 3, 1\} = 1$



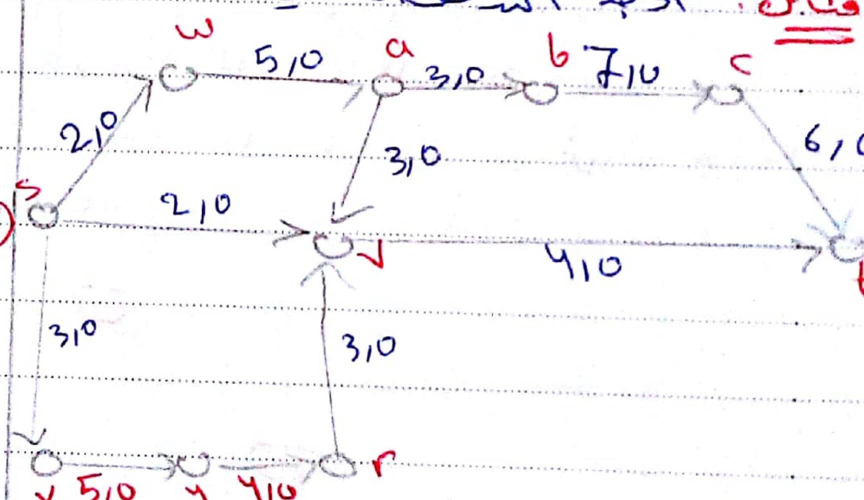
$f = 11$

$\sum_{\vec{e} \in \langle\{x,y,z\},t\rangle} f(\vec{e}) = cap\langle\{s,x,y,z\},t\rangle$

شبكة مشبعة

المحاضرة الحادية عشر

مثال: أوجد التدفق الأعظمي للشبكة



نختار أقصر مسار الذي هو

$P_1 = \langle s, v, t \rangle$

نحسب الآن التدفق الأعظمي فيه

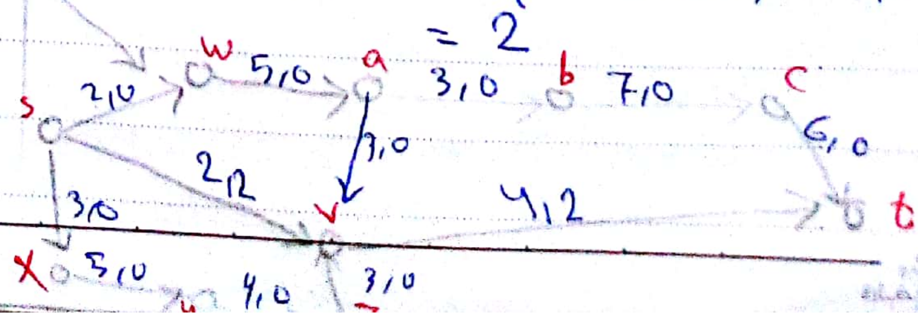
$Max\,\Delta P_1 = \min\{2-0, 4-0\} = 2$

ومنه $Val(f) = 2$

نأخذ المسار الثاني

$P_2 = \langle s, w, a, v, t \rangle$

$Max\,\Delta P_2 = \min\{2-0, 5-0, 3-0, 4-2\} = 2$



"المحاضرة الحادية عشر"

Ford & Fulkerson ALgorithm (Max flow):

1) $\forall \vec{e} \in \vec{E} : f(\vec{e})=0$

2) اوجد مسار زيادة للتدفق

2.1) اوجد قيمة الزيادة للتدفق Δe على كل اتجاه

2.2) $\Delta\vec{Q} = \min_{\vec{e}\in\vec{Q}}\{\Delta e\}$

حيث $\Delta\vec{Q}$ الزيادة الممكنة على $\vec{Q}$

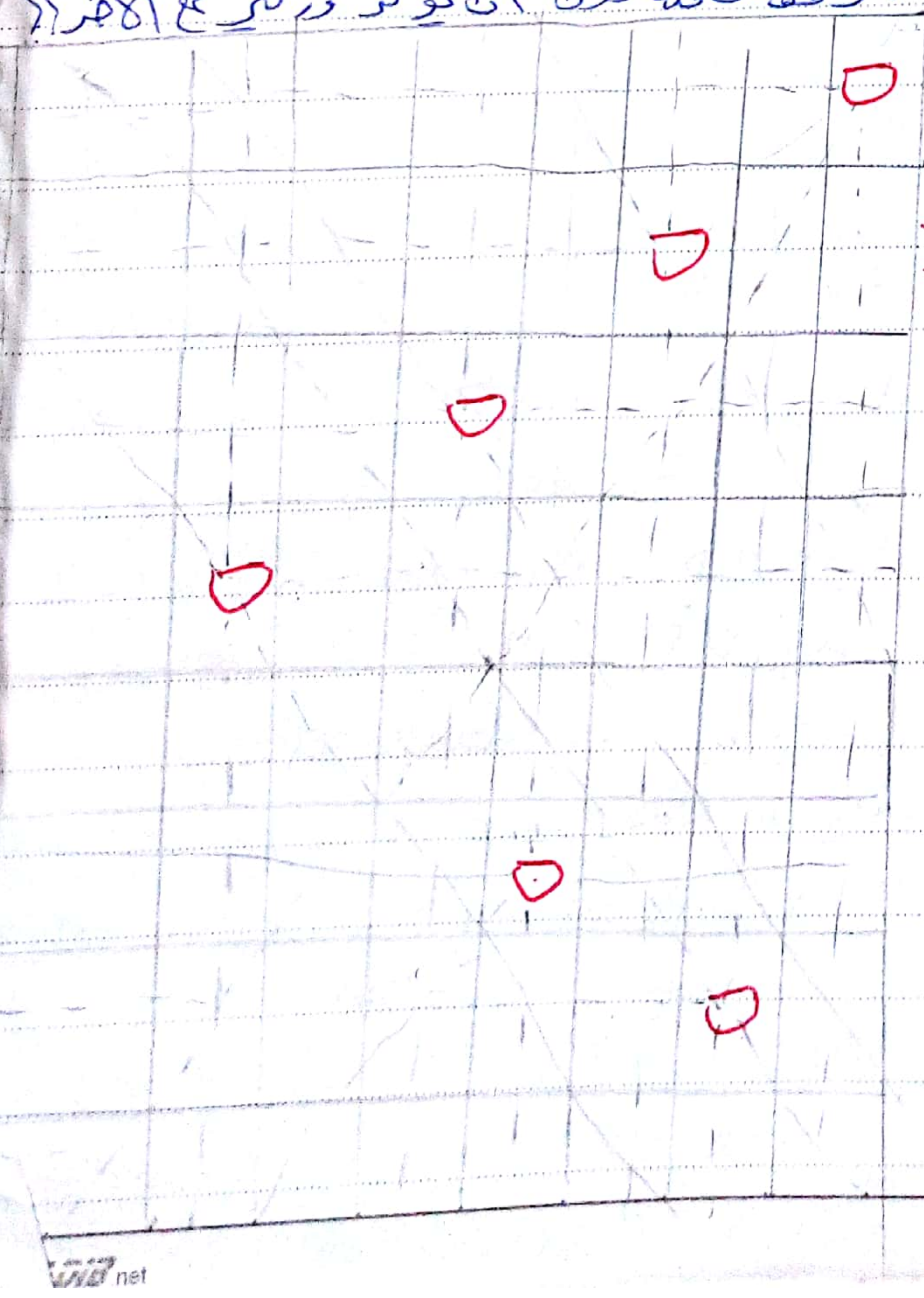
2.3) $\vec{e}\in\vec{Q}$: $\vec{e}\in$ Farc

$f^*(\vec{e}) = f^*(e) + \Delta\vec{Q}$

$\vec{e}\in$ Barc : $f^*(\vec{e}) = f(e) - \Delta\vec{Q}$

مسألة الوزراء السبعة:

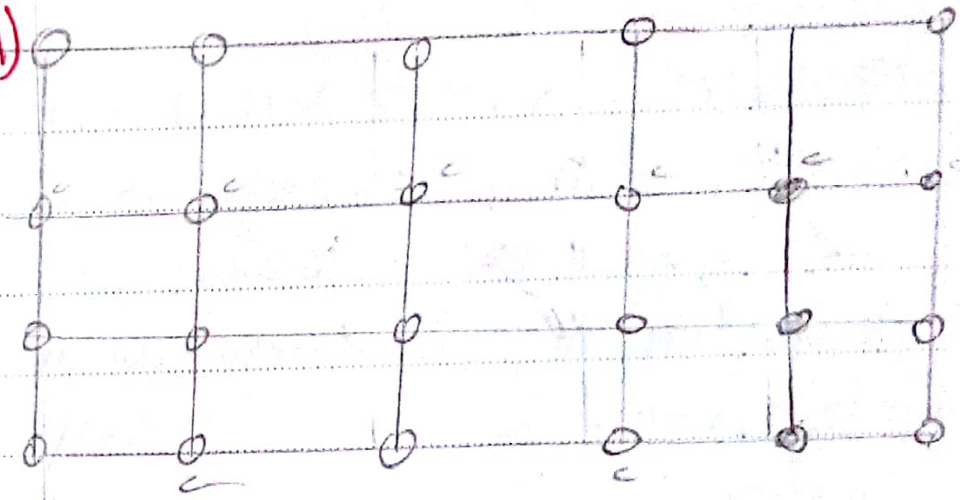
ماهو اقل عدد ممكن من الوزراء بحيث يغطي الرقعة كاملة دون ان يؤثر وزير ع الاخر؟؟



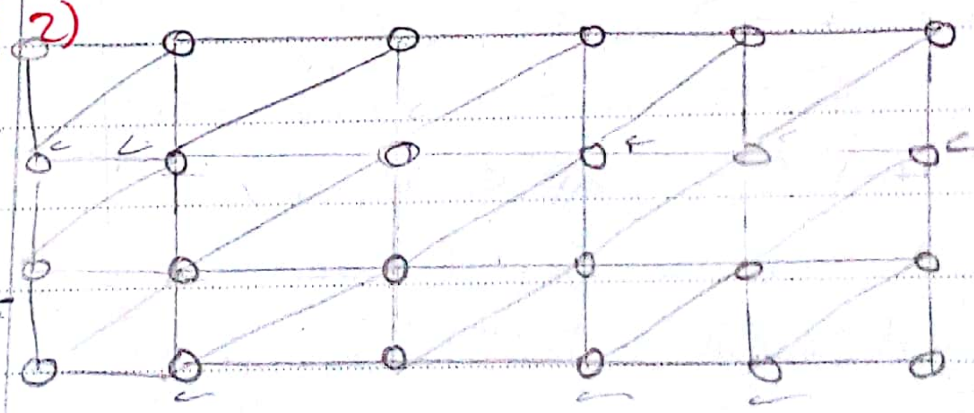
سنبحث في هذه المسألة لايجاد طرق ايجاد عدد السيطرة

مثال: اوجد اقل عدد ممكن من عدد السيطرة ؟؟ واوجدها في البيانات الاخرى

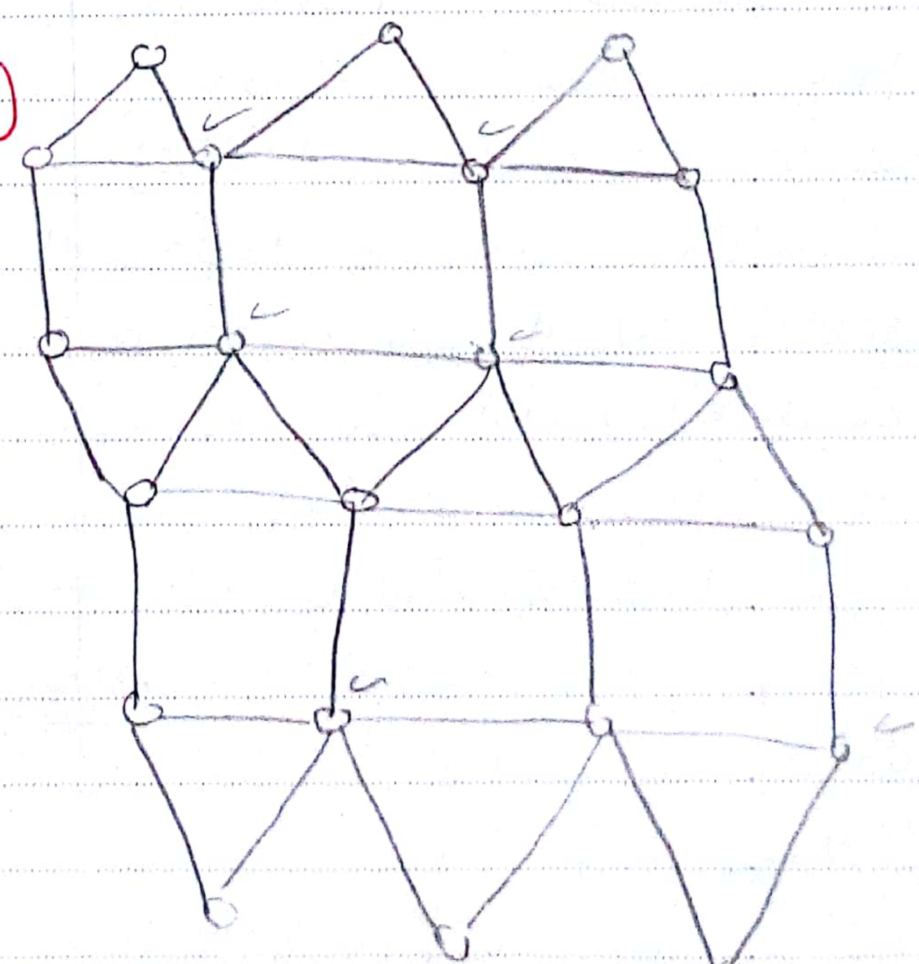
1)



2)



3)

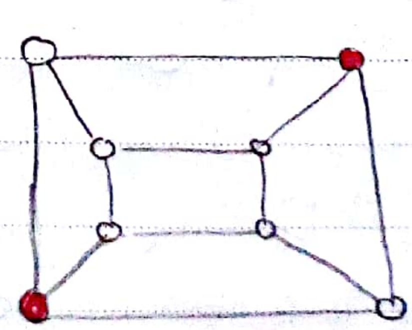


Scanned by CamScanner

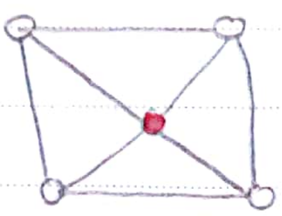
اقل عدد ممكن من الوزراء لتغطية الرقعة ع
هي 6 وزراء حل هذه المسألة
Jaenisch في عام 1960 وعدد
المراجعات التي تناولت هذه المسألة
1800 دراسة.
اذا كانت الرقعة اكبر من رقعة الشطرنج
الاعتيادية (اي $n \times n$ حيث $n > 8$)
توجد هناك تخمين Vizing conjecture

تعريف:
لتكن لدينا البيان $G(V,E)$ بيان بسيط
ومترابط ولتكن $D \subseteq V$ مجموعة جزئية
من مجموعة العقد V نسمي المجموعة D
مجموعة عقد سيطرة البيان Dominating set
اذا كان من اجل كل عقدة V تنتمي الى مجموعة
العقد اما ان تكون هذه العقدة من
عقد D او توجد عقدة في D تجاور هذه
العقدة اي $\forall v \in V$ اما
$v \in D$ أو
$\exists u \in D;\ e = (v,u) \in E$
نسمي اصغر مجموعة سيطرة مجموعة السيطرة
الاصغرية حيث يمثل عدد عناصرها
Domination Number
ويرمز له عادة بالرمز $\gamma(G)$

مثال: اوجد مجموعة السيطرة الصغرى:
أ-

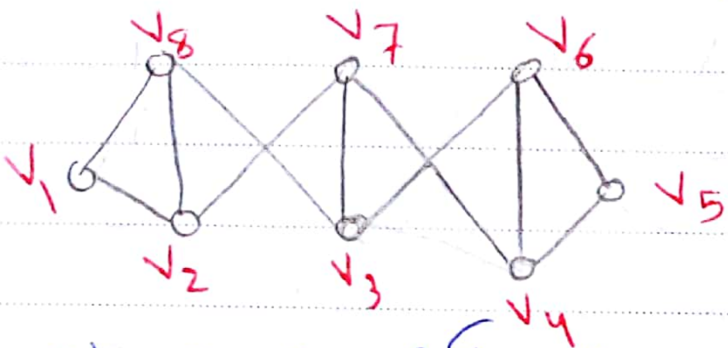


Dom.Nu = 2



Dom. Nu = 1

مثال: اوجد مجموعة السيطرة الصغرى للبيان التالي:



نلاحظ ان هناك اكثر من مجموعة سيطرة
$L_1 = \{v_2, v_6\}$
$D = L_2 = \{v_8, v_4\}$
ان L_1 و L_2 مجموعة سيطرة صغرى
(ولا عقدة مغطاة مرتين. واذا وجد عقدة مغطاة مرتين ليس من الضروري ان تكون المجموعة ليست سيطرة صغرى)

ملاحظة: اذا كان لدينا $v \in V$ عندئذ
$N(v)$ هي مجموعة العقد التي تجاور العقدة v ونسميها جوار مفتوح حيث
$N(v) = \{u : (u,v) \in E\}$
ان $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ جوار مغلق

تعريف:
اذا كان لدينا $G(V,E)$ بيان تكون
$D \subseteq V$ مجموعة سيطرة اذا اخذنا
$N[D] = V$ الجوار مغلق لـ D
(اي اذا كانت D فمجاوراتها تساوي مجموعة عقد الكلية)

في المثال السابق:

$N[V_8, V_4] = \{V_i \; , i = 1,\dots,8\}$

مبرهنة: ليكن لدينا $G=(V,E)$ بيان

D اصغر مجموعة سيطرة $\Leftarrow$ $V-D$ مجموعة سيطرة

الاثبات:

لنفرض ان D مجموعة سيطرة و لنثبت ان $V-D$ مجموعة سيطرة و لنثبت انه اذا كان $v\in V$ فان اما $v\in V-D$ او $\exists u\in V-D : (u,v)\in E$

- اذا كان $v\in V-D$ تم المطلوب
- لنفرض ان $v\in V-D$ عندئذ $v\in D$ لكن D مجموعة سيطرة ومنه $\exists w\in V-D$ يجب يكون $(v,w)\in E$ وبالتالي نستنتج ان $\forall v\in V$ فانه اما

$v\in V-D \vee \exists u\in V-D : (u,v)\in E$

وبالتالي $V-D$ مجموعة سيطرة.

في المثال السابق:

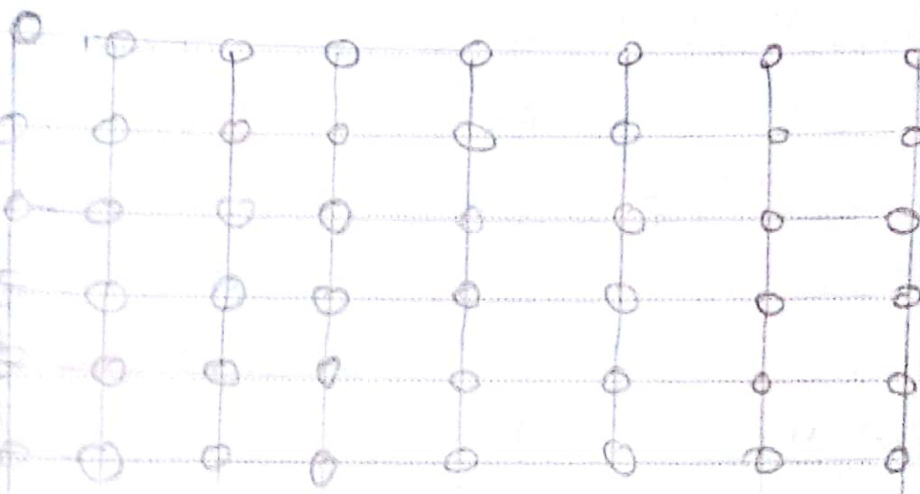
$D' = V-D = \{V_1, V_2, V_3, V_5, V_6, V_7\}$

مجموعة سيطرة

تمرين: ليكن لدينا البيان $G=(V,E)$ ولتكن D سيطرة اصغرية

$\gamma(G) = |V(D)|$

عندئذ $\gamma(G) \le |V|/2$



المحاضرة السادسة عشر

مبرهنة: ليكن لدينا البيان $G=(V,E)$ ولتكن D مجموعة سيطرة عندئذٍ يكون

D مجموعة سيطرة اصغرية $\Leftrightarrow$ $\forall u\in D$ فان

L {
١- اما u عقدة معزولة
٢- او $\exists v\in V-D$; $N(v)\cap D = u$

$N(v)$ مجموعة جوارات الاثادا

البرهان:

$\Leftarrow$) لتكن D مجموعة سيطرة اصغرية لنثبت صحة L

لتكن $u\in D$ عندئذ $D-u$ ليست مجموعة سيطرة اذا عندئذ $\exists v\in V-D$ يجب v غير مغطاة بأي عقدة من $D-u$ نميز حالتين:

I) $u=v$ $\Leftarrow$ u عقدة معزولة

II) $u\neq v$ $\Leftarrow$ v غير مغطاة بأي عقدة من $D-u$ ولكن لامغطاة حقيقة من D وحده

$N(v)\cap D = u$

ومنه الشرط L محقق

$\Leftrightarrow$) الشرط L محقق حيث D مجموعة سيطرة لنثبت ان D مجموعة سيطرة اصغرية

نفترض ان D ليست مجموعة سيطرة اصغرية

$\Leftarrow \exists\, u \in D$ بحيث $D-u$ مجموعة سيطرة

هذا يعني ان الـ u المجاورة لعقدة

في $D-u$ وبالتالي u العقدة ليست معزولة

اذا الشرط الاول غير متحقق وهو تناقض

الحالة الثانية: $D-u$ مجموعة سيطرة عندئذ

$\forall v \in \bar{V} - \{D-u\}$

لها مجاور في $D-u$ هذا يعني ان

$N(v) \cap D \neq u$ (الشرط ثانيا)

والشرط غير متحقق ايضاً تناقض في الحالتين

وبالتالي لا توجد عقدة تحقق ذلك اذا في الحالتين

تناقض وبالتالي D مجموعة سيطرة اصغرية.

سنأخذ مجموعة من النظريات دون برهان:

درجة بيان: هي درجة اعلى عقدة نرمز لها

بـ $\Delta(G)$

عدد السيطرة هو $\gamma(G)$

مبرهنة: لكن لدينا البيان $G(V,E)$

$|V| = p$

$$\left\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \right\rceil \le \gamma(G) \le p-\Delta(G)$$

Vizing conjecture of product Graph

يعد تخمين Vizing الذي كان في عام 1963

اشهر مسألة مفتوحة حتى الان في نظرية البيان

حيث تصاغ هذه التخمين بالشكل التالي:

لكل G بيان ولكل H بيان عندئذ

$$\gamma(G \times H) \le \gamma(G)\,\gamma(H)$$

عدد التغطية في البيان جداء البيانين اصغر

او يساوي عدد التغطية في البيان G مضروب

في عدد التغطية في البيان H

يعد محاولة عديدة لبرهنة التخمين تم ايجاد

عامل جداء بيان مكون من جداء مسارين

طول المسار الاول $m-1$ والثاني $n-1$ حيث

$m-1,\ n-1 : P_n \times P_m$

$1 \le j \le n,\ 1 \le i \le m$

فان العقدة (i,j) تجاور العقدة (p,q)

اذا تحقق مايلي

$$|i-p| + |j-q| = 1$$

تمت هذه الدراسة من قبل Jacobson عام

1983 حيث تم ايجاد السيطرة ومجموعة

السيطرة الاصغرية لبيان $m \times n$ حيث

$m = 1 \dots 4$

مبرهنة:

$$\gamma(P_1 \times P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

$$\gamma(P_2 \times P_n) = \left\lceil \frac{(n+1)}{2} \right\rceil$$

$$\gamma(P_3 \times P_n) = n - \left\lfloor \frac{(n-1)}{4} \right\rfloor$$ عدد صحيح الادنى

$$\gamma(P_4 \times P_n) = n+1$$

حيث $n = 1, 3, 5, 6, 9$

$$\gamma(P_4 \times P_n) = n$$

حيث $n \neq 1, 3, 5, 6, 9$

مبرهنة Chang 1993:

$$\gamma(P_5 \times P_n) = n+1+\left\lfloor \frac{(n+1)}{5} \right\rfloor \ ;\ n = 2, 3, 7$$

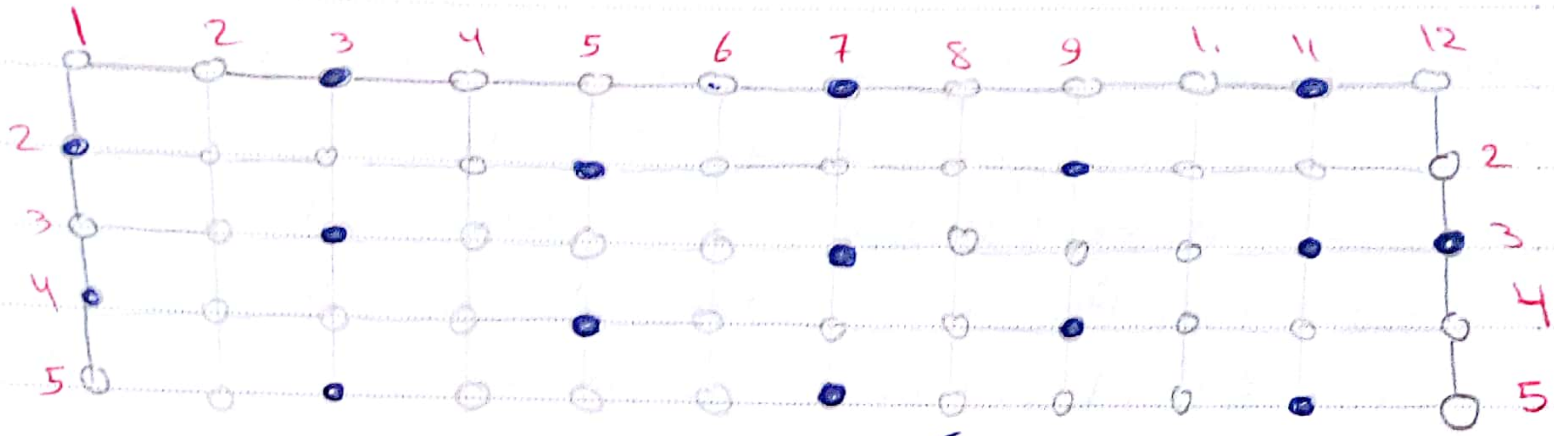
$$\gamma(P_5 \times P_n) = n+1+\left\lfloor \frac{(n+3)}{5} \right\rfloor \ ;\ n \neq 2, 3, 7$$

ما عدا هذه الاعداد

$$\gamma(P_6 \times P_n) = n+1+\left\lfloor \frac{(3n+3)}{5} \right\rfloor$$

مثال: اوجد مجموعة السيطرة الاصغرية

$P_5 \times P_{12}$



عندما تكون $n \geq 7$ تصبح المسألة أكثر تعقيداً

مثال: ليكن لدينا البيان $P_8 \times P_{19}$
أوجد مجموعة السيطرة الصغرى

خوارزمية إيجاد رقم السيطرة للبيان:

المعطيات: ليكن البيان $G(V,E)$ مجموعة العقد هي
$\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$

المطلوب إيجاد $\Delta(G)$ درجة العظمى للعقد
$\gamma(G)$ عدد السيطرة الكاملة هي:

١- أكتب (أدخل) مصفوفة الجوار $A[G]$

٢- $B = A[G] + I_p$ حيث I_p مصفوفة واحدية من المرتبة P (حيث P عدد العقد)

٣- أوجد العدد K

$$K = \left\lceil \frac{P}{1+\Delta(G)} \right\rceil$$

٤- أوجد المصفوفة الجزئية $B_K(G)$ وكل سطر فيها الذي هو W_{ij}
$i, j = 1 \dots K$
حيث هذه هي أدلة العقد الموافقة للأسطر
حيث $K \geq 2$ (كل المصفوفات الجزئية من البعد) $K \times P$

٥- أوجد المجموع
$W_{i1} + W_{i2} + \dots + W_{iK} =$ أسطر
$(b_1, b_2, \dots, b_P)$ عناصر

أ- إذا كان $b_L = 0$ من أجل $L = 1 \dots P$
في هذه الحالة انتقل إلى المصفوفة التالية واذهب للخطوة رقم 4

ب- $b_L \neq 0$ من أجل $L = 1 \dots P$
في جميع المصفوفات الجزئية B_K عندئذ ضع $K+1$ اذهب للخطوة رقم 4

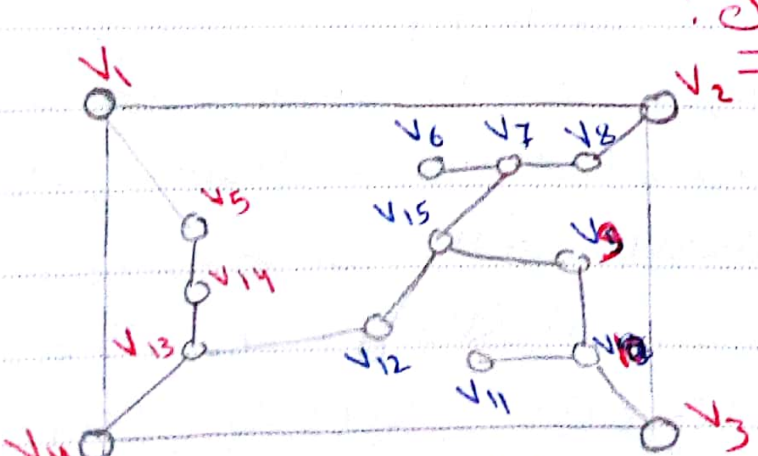
٦- إن $\gamma(G) = K$ ومجموعة السيطرة
$D = \{V_{i1}, V_{i2}, \dots, V_{iK}\}$

مثال عن (أ و ب): 2)

3×3
$$\begin{array}{c} \\ ① \\ ② \end{array}\begin{bmatrix} X & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \end{bmatrix}$$

نأخذ 2×3
نأخذ ① ونجد فيها قيم صفرية
نأخذ 2 ونجد فيها قيم صفرية
نأخذ السطر الأول والأخير ونجد قيم صفرية
نزيد الـ K ونأخذ المصفوفة كاملة.

مثال:



أوجد مجموعة السيطرة الصغرى وفق الخوارزمية السابقة

الحل: نوجد مصفوفة التجاور $A[G]$

ثم نوجد $B(G)$ حيث

$$B(G) = A[G] + I_{15}$$

$$k = \left\lceil \frac{15}{1+3} \right\rceil = 4$$

نوجد اول مصفوفة وهي اول 4 اسطر

$$\begin{bmatrix} 1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix}$$

مجموع الاسطر هو:

3 3 3 3 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0

المجموع يحوي قيم صفرية ننتقل الى المصفوفة التالية من البعد 4×15 والتي هي

$$\begin{bmatrix} 1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ \cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{1}&\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{1}&&&&& \\ 1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

المجموع هو

3 3 2 2 1 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0

يحوي قيم صفرية ننتقل الى المصفوفة التالية

نتابع هكذا حتى نصل الى المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0 \end{bmatrix}$$

ان هذه المصفوفة هي عبارة عن الاسطر الاربعة w_{11} , w_{72} , w_{103} , w_{134}

والمجموع هنا هو

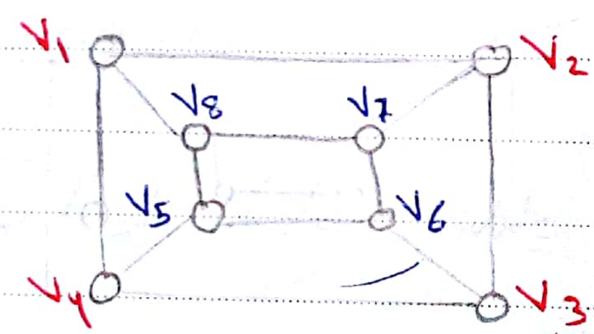
1 1 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

تحوي اي قيمة صفرية لتصل الى الخطوة السادسة حيث مجموعة السيطرة هي

V_{11} , V_{72} , V_{103} , V_{134}

اي العقد هي $(V_1, V_7, V_{10}, V_{13})$

مثال: اوجد مجموعة السيطرة الصغرى وفق الخوارزمية السابقة.



المحاضرة السابعة عشر

Dijkstra Distance Algorithm

خوارزمية ديكسترا

ليكن لدينا البيان $G=(V,E)$ بيان موزون ومترابط عدد عقده P , $|V|=P$

ولتكن $v_0 \in V$ المطلوب:

ايجاد المسافة بين العقدة v_0 واي عقدة في البيان الخطوات هي

1- $i=0$, $S_0=\{v_0\}$, $L(v_0)=0$

$\forall v \in V : v \neq v_0 : L(v) = \infty$

if $P=1$ than Stop

else : go to Step 2

2- $\forall v \in \bar{V} : \bar{S}_i = N(S_i)$:

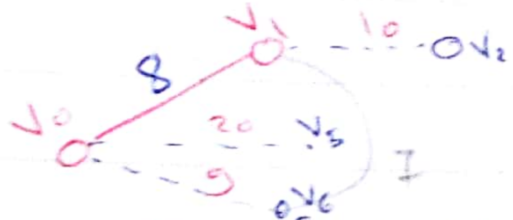
$v \in \bar{S}_i$; مجموعة المجاورات

عندئذ

$$L(v) = \min\{L(v), L(v_i) + d(v_i, v)\}$$

اذا حدث تغير ع قيمة $L(v)$ عندئذ نرقم $(L(v), v_i)$

بالشكل



مثال

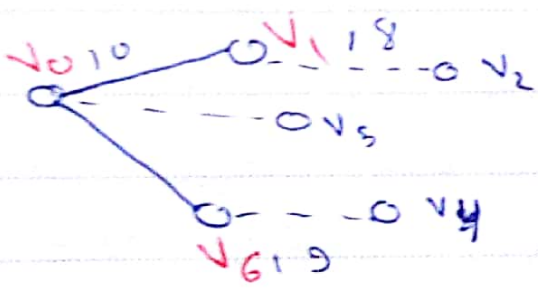
$S_1 = \{V_0, V_1\}$, $i = 1$, $i < P-1 = 6$

$S_1' = \{V_2, V_5, V_6\}$

$L(V_2) = 18$ (2.2) ١٠

$L(V_5) = 20$

$L(V_6) = \{9, 8+7\} = 9$



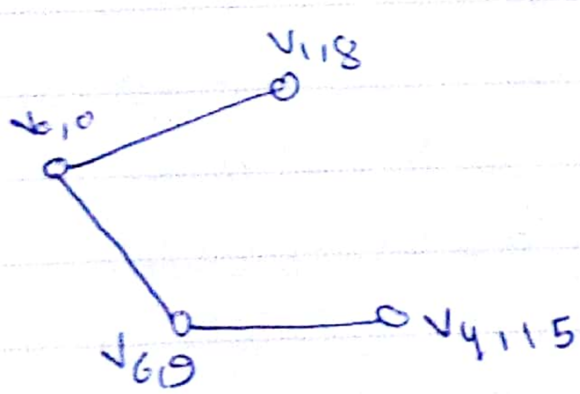
$S_2 = \{V_0, V_1, V_6\}$

$S_2' = \{V_2, V_4, V_5\}$

$L(V_2) = 18$

$L(V_5) = 20$

$L(V_4) = 15$



$S_3 = \{V_0, V_1, V_6, V_4\}$

$S_3' = \{V_2, V_5, V_3\}$

$L(V_2) = 18$

$L(V_5) = \min\{20, 19\} = 19$

طريقنا أطول قبل من V_0 لـ V_5 ... من V_0 لـ V_5

3- Find $\min(L\,v)$, $v \in S_i'$

أقل مسافة بين V_0 , V_{i+1}

4- Put $S_{i+1} = S_i + \{V_{i+1}\}$

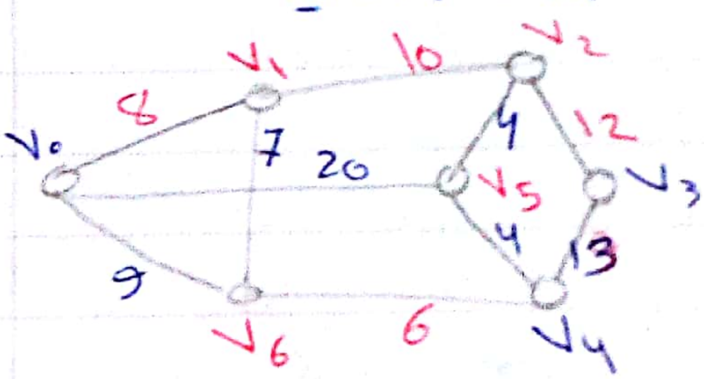
5- Put $i = i+1$

if $i = P-1$ then Stop

else go to Step 2

مثال:

لكن لدينا البيان التالي



طبق خوارزمية ديكسترا لإيجاد أقل مسافة بين V_0 وبقية عقد البيان

الحل

$P = \cancel{6}\ 7$ عدد عقد البيان

1- $i = 0$, $S_0 = \{V_0\}$, $L(V_0) = 0$

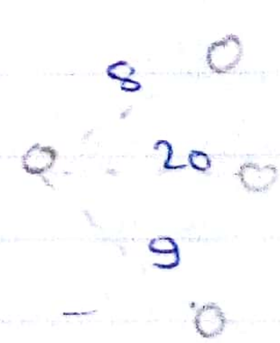
$\forall v \in V : v \neq V_0 : L(v) = \infty$

2- $S_0' = \{V_1, V_5, V_6\}$ جارات V_0

$L(V_1) = 8$

$L(V_5) = 20$

$L(V_6) = 9$



$L(v) = \min\{L(V_1), L(V_5), L(V_6)\} = 8$

Ramsey Numbers

Frank Ramsey 1930

ادعى الادعاء التالي :

بين كل 6 اشخاص هناك 3 يعرفون بعضهم بالتبادل او 3 لا يعرفون بعضهم بتاتاً و هذه المسألة فتحت باب كبير لا يزال قائم حتى الان

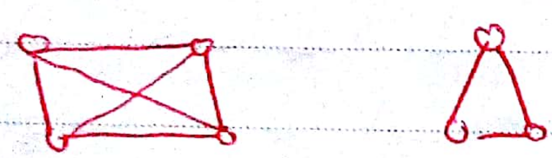
اصبحت في البيان على الشكل التالي :

لكن $G(V,E)$ بيان بسيط مترابط مقولة تقول $|V|=6$

اما $K_3 \subseteq G$ او $\bar{K}_3 \subseteq G$

1935 قام مجموعة من العلماء منهم Erdos يمكن التعبير عن اعداد رمزي بالمصطلح $R(s,t)$ حيث s,t عددين صحيحين عندئذ يكون اقل عدد صحيح موجب مثل b بحيث يكون البيان البسيط المترابط G الذي عدد عقده p (حيث يكون البيان G) اما $K_s \subseteq G$ او $K_t \subseteq G$

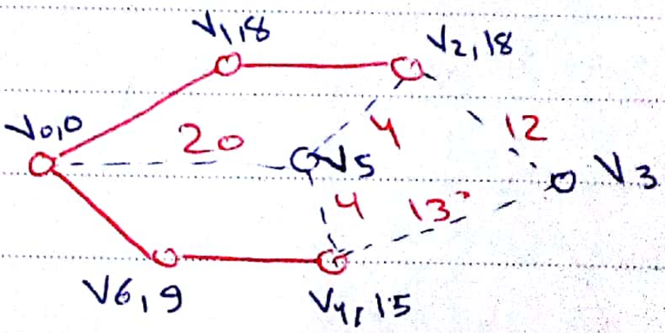
هذه المسألة NP_complete



يكون اصغر عدد صحيح p هو عدد رمزي موجب بيان P, G بحيث اما $K_5 \subseteq G$ او $K_4 \subseteq G$

$L(V_3) = 28$

$\min L(V_i) = \{18, 19, 28\} = 18$



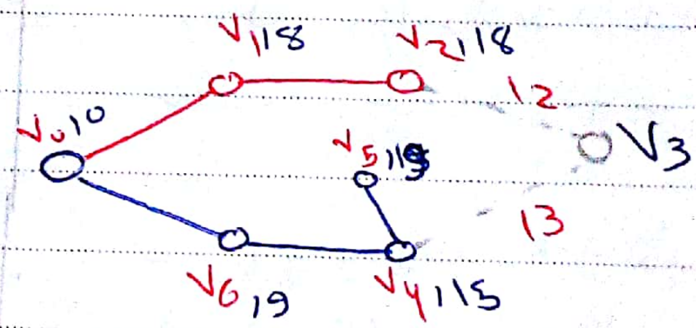
$S_4 = \{V_0, V_1, V_2, V_6, V_4\}$

$S'_4 = \{V_5, V_3\}$

$L(V_5) = \min\{22, 20, 19\} = 19$

$L(V_3) = \min\{30, 28\} = 28$

$L(V) = \min\{L(V_3), L(V_5)\} = 19$

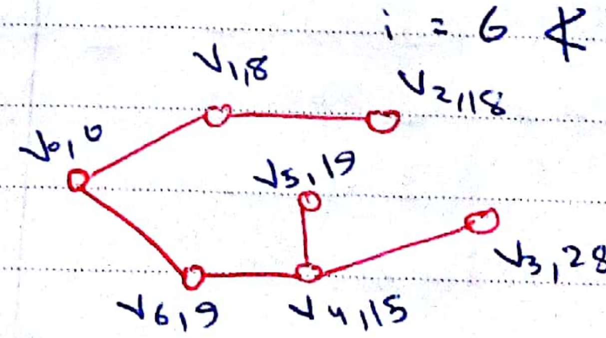


$S_5 = \{V_0, V_1, V_2, V_4, V_5, V_6\}$

$S'_5 = V_3$

$L(V_3) = \min\{30, 28\} = 28$

$i = 6 \not< P-1$



$d(V_0, V_1) = L(V_1) = 8$

$d(V_0, V_5) = L(V_5) = 19$

$d(V_0, V_6) = L(V_6) = 9$

$d(V_0, V_4) = L(V_4) = 15$

$d(V_0, V_3) = L(V_3) = 28$

$d(V_0, V_2) = L(V_2) = 18$

« المحاضرة الثامنة عشر »

اذا كان s و t عددين صحيحين موجبين فإن عدد رمزي $R(s,t)$ هو اقل عدد صحيح موجب p بحيث كل بيان بسيط $G=(V,E)$; $|V|=p$ يحوي K_s او $\overline{K_t}$

اي ان عدد رمزي لـ s و t هو p

معناه $K_s \subseteq G$, $K_t \subseteq \overline{G}$

البيان المتمم عدد رؤوسه p

اي ان عدد رمزي يعني البيان الذي عدد رؤوسه يساوي (p) يحوي البيان K_s كبيان جزئي او يحوي k رؤوس مستقلة

رمز درجة الرأس $u \in V$

$\deg(u)$

جوار الرأس $N(u)$ (مجموعة) هي مجموعة جارات الرأس u

اذا كان G البيان نكتب

$\deg(u,G)$, $N(u,G)$

مبرهنة 1:

ليكن لدينا البيان $G=(V,E)$ ، $|V|=6$. فإن هذا البيان اما يحوي K_3 كبيان جزئي او متمم K_3

الاثبات:

ليكن $u \in V$

$\deg(u) = \deg(u,\overline{G}) + \deg(u,G)$

$= 5$

اما $\deg(u,G) \geq 3$

او $\deg(u,\overline{G}) \geq 3$

نفرض ان $\deg(u,G) \geq 3$ ولتكن 3 رؤوس $x,y,z \in V$ جارات الرأس u

$N(u,G) = \{x,y,z,\dots\}$

الشكل (a) اذا كان هناك رأسين x,y متجاورين عندئذ البيان G يحوي K_3

اذا لم يوجد تجاور بين الرؤوس 3 ينتج ان 3 رؤوس مستقلة اي $K_3 \subseteq \overline{G}$

اي $K_3 \subseteq \overline{G}$

مبرهنة 2:

$\forall s,t \geq 1$

فإن $R(s,t) = R(t,s)$

(واضحة من تعريف اعداد رمزي)

مبرهنة 3:

$R(s,1) = 1$; $\forall s \geq 1$

(واضحة لأن اي بيان تافه يحوي K_1 بيان جزئي)

مبرهنة 4:

$R(s,2) = s$; $\forall s \geq 1$

الاثبات: ليكن لدينا بيان $G(V,E)$ ملون تام $|V|=s$

عندئذ G تحوي K_2 او بيان المكملة

$R(s,2)\le s$

لنثبت ان $R(s,2)\ge s$

وهذه واضحة لأن أي بيان $(pts)\,K_{s-1}$ احد عقدة

$s-1$ لا يمكن ان تحوي اي بيان

K_s كبيان جزئي

و $\overline{K_{s-1}}$ لا تحوي اي ضلع

وبالتالي $R(s,2)\ge s$

ومنه $R(s,2)=s$

مبرهنة 5 (Erdos):

P- $\forall s,t\ge 3$:

$R(s,t)\le R(s-1,t)+R(s,t-1)$

ب- اذا كان $R(s,t-1)$ و $R(s-1,t)$ عددان زوجيان فان

$R(s,t)<R(s-1,t)+R(s,t-1)$

حساب اعداد رمزي:

ان عملية ايجاد اعداد رمزي $R(s,t)$ من $s,t\ge 3$ صعبة جداً باستثناء الحالات القليلة (عندما تكون s و t صغيرة) الحالات التي يكون فيها $s=3$ و $3\le t\le 9$ وكذلك بعض الحالات $s=4$ و $3\le t\le 9$

جدول لاعداد رمزي في هذه الحالات:

s \ t	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4	9	18	25	...	.		

مبرهنة: اثبت ان $R(3,4)=9$

الاثبات: $R(3,3)=6$ اعتماداً ع المبرهنة رقم واحد

و $R(4,2)=4$ اعتماداً ع المبرهنة رقم 4

من المبرهنة 5 الحالة ب ولكن قبل هذا!

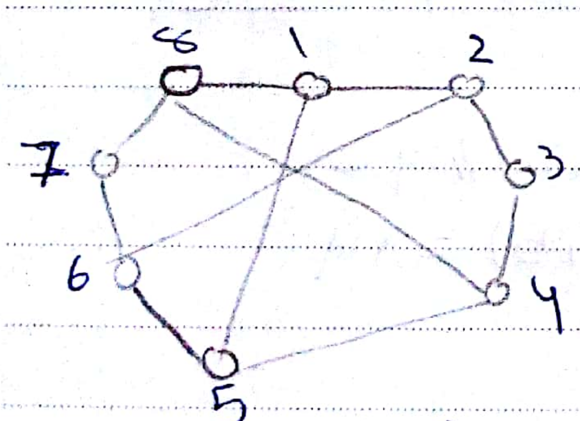
نعلم ان $R(4,2)=4 \Leftarrow R(2,4)=4$

حسب (2) لان حسب المبرهنة 5 فان

$R(3,4)<R(3,3)+R(2,4)$

$=6+4=10$

لنوجد الان البيان عدد عقده تمثل اصغر عدد صحيح بحيث لا يحوي K_3 وبيان جزئي و $\overline{K_4}$ ايضاً



هذا البيان يحوي اكبر عدد من الاضلاع

بحيث لا يحوي K_3 او $\overline{K_4}$ كبيان جزئي

سبب ان $R(3,4)>8$

ولدينا $R(3,4) < 10$

$\Leftarrow$ $R(3,4) = 9$ (كي ان يكون ع د أعلج)

مبرهنة: $R(3,5)=14$

الإثبات:

$R(3,4) = 9$ حسب المبرهنة السابقة

$R(2,5) = 5$

حسب المبرهنة 5 . حسب أ

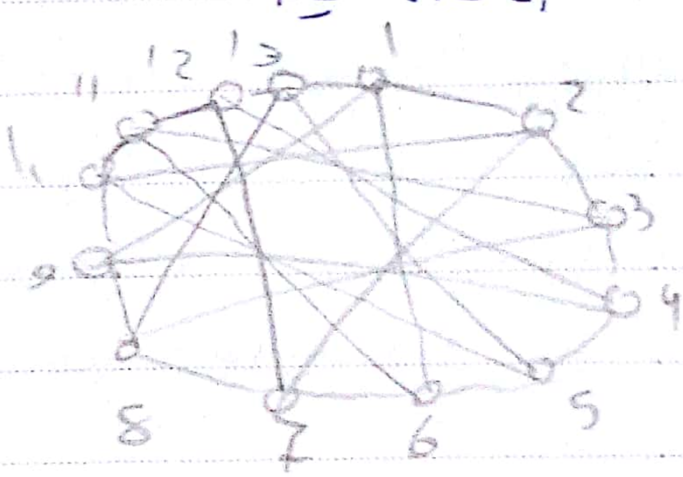
$$R(3,5) \leq R(2,5) + R(3,4)$$

$$= 9 + 5 = 14$$

$$R(3,5) \leq 14$$

لنثبت عكس المتراجحة اي $R(3,5) \geq 14$

لنا هذا البيان التالي:



هذا البيان 13 كعوي لا K_3 كبيان جزئي

او $\overline{K_5}$ واهنا هو اي ~~عمرة~~ ضلع تفعرة

الكاملة (لا امضر بيان كعوي 13

عمدة _

نستنتج ان $R(3,5) \geq 14$ ومنها،

$$R(3,5) = 14$$