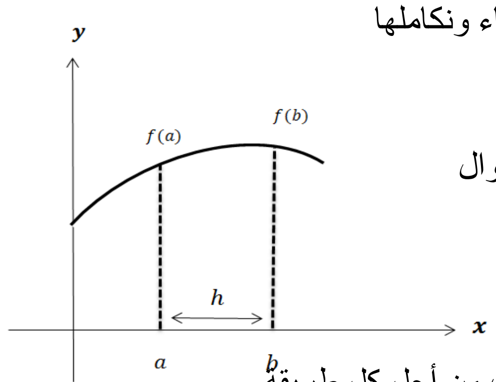
◄ دكتورة المادة: رشا بعاج

◄المحاضرة: الخامسة عشر والسادسة عشر

التكامل العددي

بالتكامل العددي نستبدل المنحني الممثل للدالة بدوال أخرى وهي دوال الاستيفاء ونكاملها



مبدأ التكامل العددي

تقوم معظم الطرائق العددية لحساب التكامل على اختيار متتالية من الدوال $\{f_n(x)\}$ معرفة على المجال $[a,b]$ وقابلة للمكاملة (غالباً يتم استخدام كثيرات حدود الاستيفاء لهذه المهمة) وبحيث تكون هذه الدوال متقاربة بانتظام إلى الحدودية عندئذٍ نقوم بحساب التكامل $I\ (f_n)$ (وهو رمز التكامل) عوضا عن $I(f)$ ولكن يجب الانتباه إلى ضرورة إيجاد الخطأ الأعظمي المرتكب من أجل كل طريقة

الطريقة الأولى :

- **طريقة شبه المنحرفات :**

تعتمد هذه الطريقة على استبدال الدالة f بحدودية واحدة من الدرجة الأولى

$$I(f) \approx \int_a^b f(x).dx \approx \int_a^b L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1.dx$$

لو أخذنا حدودية لاغرانج التي تستوفي النقطتين $(x_1 = b, y_1 = f(b))$ $(x_0 = a, y_0 = f(a))$ فإنه يكون

$$\approx \int_a^b \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) y_0.dx + \int_a^b \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) y_1.dx$$

$$\approx y_0 \int_a^b -\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) dx + y_1 \int_a^b \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) dx$$

نفرض $h = x_1 - x_0$ ومنه :

$$\approx y_0 \int_a^b -\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) dx + y_1 \int_a^b \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) dx$$

$$\approx y_0 \int_a^b -\left(\frac{x - x_1}{h}\right) dx + y_1 \int_a^b \left(\frac{x - x_0}{h}\right) dx$$

$$I(f) \approx -\frac{y_0}{h}\frac{(x-x_1)^2}{2}\Big|_a^b + \frac{y_1}{h}\frac{(x-x_0)^2}{2}\Big|_a^b$$
$$\approx \frac{y_0}{2h}(a-b)^2 + \frac{y_1}{2h}(b-a)^2$$
$$\approx \frac{y_0}{2h}(h)^2 + \frac{y_1}{2h}(h)^2$$

$$\boxed{I(f) \approx \frac{h}{2}[y_0 + y_1]}$$

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b E_n(x)dx$$
$$E_I = \int_a^b E_n(x)dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''(x)dx$$
$$E_I = \frac{f''(\xi)}{2!}\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\,dx$$
أو
$$E_I = \frac{f''(\xi)}{2!}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$$
$$x = a + hu$$
$$\underbrace{E_I = \left|\frac{f''(\xi)}{2!}h^3\int_a^b u(u-1)du\right|}_{\text{نستخدم هذا القانون لإيجاد الخطأ الأعظمي}}$$

حيث $x = a + hu \Leftarrow x - a = hu$

لدينا $x = a + hu$ ومنه $x - b = a + hu - b \Leftarrow x - b = -(b-a) + hu$

$x - b = -\mathrm{h} + hu \Leftarrow x - b = \mathrm{h}(u-1)$

$$E_I = \frac{f''(\xi)}{2!}h^3\left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}\right]_0^1 \quad ==> \quad \underbrace{E_I = \left|\frac{h^3}{12}.f''(\xi)\right|}_{\text{نستخدم هذا القانون لإيجاد الخطأ الأعظمي}}$$

مثال:

احسب التكامل $\int_1^{2.5} e^{x^2}.dx$ بطريقة شبه المنحرف وطريقة سمبسون واحسب الخطأ الأعظمي :

- **طريقة شبه المنحرف:**

x_i	1	2,5
y_i	2,71828	518,01282

$$h = b - a = 2,5 - 1 = 1,5$$

و بالتالي يكون:

$$I(f) \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) \approx \frac{1.5}{2}(2.71828 + 518.01282) \approx 390.548325$$

حساب الخطأ الأعظمي :

$$f(x) = e^{x^2}$$

$$f`(x) = 2xe^{x^2} \quad , \quad f``(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$$

بما أن $f(x)$ متزايدة نعوض $x = 2,5$ حيث هي القيمة العظمى على المجال $[1,2.5]$

$$f``(\xi) = f``(2,5) = 2e^{2,5^2} + 4(2,5)^2e^{2,5^2} = 13986,34627$$

ومنه الخطأ الأعظمي $E_I = \left|\frac{h^3}{12}.f``(\xi)\right|$

$$E_I = \left|\frac{(1,5)^3}{12}13986,34627\right| => E_I = 3933,659888$$

ملاحظة: في بعض الأحيان لا نجد دالة في نص السؤال لكن جدول القيم يكون موجود وفي أحيان أخرى نجد الدالة دون جدول القيم فنوجده نحن

الطريقة الثانية :

- طريقة سمبسون :

تعتمد هذه الطريقة على استبدال الدالة بحدودية من الدرجة الثانية :

$$I(f) \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

حيث : $h = \frac{b-a}{2}$

قانون الخطأ $\underbrace{E_I = \left|\frac{h^5}{90}.f^{(4)}(\xi)\right|}_{\text{يستخدم هذا القانون لإيجاد الخطأ}}$

- حل التمرين السابق بطريقة سمبسون :

x_i	y_i
1	2,71828
$\frac{a+b}{2} = \frac{1+2,5}{2} = 1,75$ نقطة المنتصف	21,38094
2,5	518,01282

نحسب الخطوة :

$$h = \frac{b-a}{2} = 0,75$$

$$I(f) \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \approx \frac{0,75}{3}[2,71828 + (4)(21,38094) + 518,01282]$$
$$\approx 151,563715$$

حساب الخطأ الأعظمي :

$$f(x) = e^{x^2}$$
$$f`(x) = 2xe^{x^2} \quad , \quad f``(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$$
$$f'''(x) = 4xe^{x^2} + 8xe^{x^2} + 8x^3e^{x^2}$$
$$f^4(x) = 4e^{x^2} + 8x^2e^{x^2} + 8e^{x^2} + 16x^2e^{x^2} + 8x^2e^{x^2} + 16x^4e^{x^2}$$
$$= 12e^{x^2} + 32x^2e^{x^2} + 16x^4e^{x^2}$$

ومنه نلاحظ أن الدالة $f(x)$ متزايدة وبالتالي القيمة العظمى على المجال $[1,2.5]$ هي 2,5

$$f^4(\xi) = f^4(2,5) = 12e^{2,5^2} + 32(2,5)^2e^{2,5^2} + 16(2,5)^4e^{2,5^2} = 433576,7342$$

$$E_I = \left|\frac{h^5}{90}.f^{(4)}(\xi)\right| = \left|\frac{(0,75)^5}{90}433576,7342\right| = 1143,219905$$

....

اوجد قيمة التكامل التالي باستخدام طريقة سيمبسون وشبه المنحرف واحسب الخطأ المرتكب:

$$\int_2^4 \boldsymbol{ln(1+2x).dx}$$

الحل: أولاً: إيجاد التكامل باستخدام طريقة "**شبه المنحرف** "

١- نحدد الدالة: $f(x) = ln(1+2x)$

٢- نوجد قيم $f(x_i)$ حيث أن قيم x_i حدود التكامل ذاتها أي $x_0 = 2$ و $x_1 = 4$:

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 2$	$f(2) = 1,609437912$
$x_1 = 4$	$f(4) = 2,197224577$

٣- نوجد h :

$$h = |b-a| = |4-2| = 2$$

٤- نطبّق قانون شبه المنحرف:

$$I(f) \approx \frac{h}{2}[y_0 + y_1] \approx \frac{2}{2}[1,609437912 + 2,197224577] \approx 3,806662489$$

٥- حساب الخطأ الأعظمي

$$f(x) = ln(1+2x) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{1+2x} \Rightarrow f''(x) = \frac{-4}{(1+2x)^2}$$

$$f``(\xi) = f``(2) = \left|\frac{-4}{(1+2(2))^2}\right| = -0,16$$

حيث أننا عوضنا $x = 2$ لأنها تعطي أعظم قيمة للمشتق حيث الدالة $f(x)$ متناقصة

$$\Rightarrow E_I = \left|\frac{h^3}{12} f^{``}(\xi)\right| = \left|\frac{(2)^3}{12}(-0{,}16)\right| = 0{,}106666667$$

ثانياً: إيجاد التكامل باستخدام طريقة" **سيمبسون** "

نوجد قيم $f(x_i)$ حيث أن قيم x_i حدود التكامل ذاتها أي $x_0 = 2$ و $x_1 = 4$:

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = a = 2$	$f(2) = 1{,}609437912$
نقطة المنتصف $= \frac{b+a}{2} = 3$	$f(3) = 1{,}945910149$
$x_1 = b = 4$	$f(4) = 2{,}197224577$

$$h = \frac{(b-a)}{2} = \frac{(4-2)}{2} = 1$$

نطبق قانون سيمبسون:

$$I(f) \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] \approx \frac{1}{3}[1{,}609437912 + 4(1.945910149) + 2.197224577]$$
$$\approx 3{,}863434362$$

حساب قيمة الخطأ المرتكب: نوجد $f^{(4)}(\theta)$ حيث لدينا : $f''(x) = \frac{-4}{(1+2x)^2}$

$$\Rightarrow f'''(x) = \frac{-(-(4)(2)(1+2x)(2)}{(1+2x)^4} = \frac{8(2)(1+2x)}{(1+2x)^4} = \frac{16(1+2x)}{(1+2x)^4} = \frac{16}{(1+2x)^3}$$

$f^{(4)}(x) = -\frac{3(1+2x)^2(2)(16)}{(1+2x)^6} = -\frac{96}{(1+2x)^4}$ ومنه نلاحظ ان الدالة متناقصة وبالتالي القيمة العظمى على المجال $[2,4]$ هي 2 :

$$\Rightarrow f^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(2) = \frac{-96}{(1+2(2))^4} = -0{,}1536$$

$$E_I = \left|\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)\right| = \left|\frac{1^3}{90}(-0{,}1536)\right| = 1.7066666667 * 10^{-3}$$

درسنا طريقتي شبه المنحرف و سمبسون لحساب التكاملات العددية إلا أنه لحساب أدق يمكن أن نتبع طريقة شبه المنحرف المركبة أو سمبسون المركبة :

الطريقة الثالثة (شبه المنحرف المركبة) :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x).dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[y_0 + y_1] + \frac{h}{2}[y_1 + y_2] + \cdots + \frac{h}{2}[y_{n-1} + y_n] \approx \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n]$$

ومنه اصبح قانون التكامل من الشكل :

$$I(f) \approx \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n]$$

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{و} \quad x_i = a + h_i$$

$$E_I = \frac{h^2(b-a)}{12} f''(\xi)$$

طريقة سمبسون كانت :

$$I(f) \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$h = \frac{b-a}{2} \quad \text{حيث} \; , \quad E_I = \left|\frac{h^5}{90} . f^{(4)}(\xi)\right|$$

- أما سمبسون المركبة :

شرط N زوجية (أي إذا كانت فردية لا نستطيع تطبيق سيمبسون المركبة)

$$I(f) \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_2 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n]$$

لاحظ أن الأمثال هنا هي:4 ,4,2,4,,2 أي نبدأ بــ4 و ننهي ب4

$$E_I = \left|\frac{h^4(b-a)}{180} . f^{(4)}(\xi)\right|$$

$$h = \frac{b-a}{\mathrm{n}}$$

مثال : احسب تكامل $\int_0^2 e^x$ بطريقتي شبه المنحرف المركبة وطريقة سمبسون المركبة حيث $n = 8$

$f(x) = e^x$ $\qquad h = \frac{b-a}{\mathrm{n}} = \frac{2-0}{8} \left(\frac{1}{4}\right) = 0{,}25$

i	x	$f(x)$
0	0	1
1	0.25	1.28403
2	0.50	1.64872
3	0.75	2.117
4	1	2.71828
5	1.25	3.49034
6	1.50	4.48169
7	1.75	5.75460
8	2	7.38906

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{8} = \frac{1}{4}$$

$$I \approx \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_7 + y_8]$$

$$\approx \frac{0.25}{2}[1 + 2(1.28403) + 2(1.64872) + 2(2.117) + 2(2.71828) + 2(3.49034) + 2(4.48169) + 2(5.75460) + 7.38906]$$

$$\approx 6.4222975$$

ايجاد الخطأ الاعظمي:

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

نلاحظ ان الدالة f(x) متزايدة لذلك القيمة العظمى على المجال [0,2] هي 2 :

$$f''(\xi) = f''(2) = e^2$$

$$E_I = \left|\frac{h^2(b-a)}{12}f''(\xi)\xi\right| = \left|\frac{(0,25)^2(2-0)}{12}.e^2\right| = 0,07696933436$$

طريقة سمبسون المركبة:

$$I(f) \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 4y_7 + y_8]$$

$$\approx \frac{0.25}{3}[1 + 4(1.28403) + 2(1.64872) + 4(2.117) + 2(2.71828) + 4(3.49034) + 2(4.48169) + 4(5.75460) + 7.38906]$$

$$\approx 6.3891933$$

$$E_I = \frac{(0.25)^4(2-0)}{180}e^2 = 0.0003207056 = 0.3207056 \times 10^{-3}$$

… … …

تمرين وظيفة: احسب التكامل التالي $I = \int_{0,25}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ بالطرق الاربعة : ١-طريقة شبه المنحرف ٢-طريقة سمبسون ٣-طريقة شبه المنحرف المركبة ٤- طريقة سمبسون المركبة

مع العلم ان $n = 4$

◄الحل:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

١- طريقة شبه المنحرف : $h = b - a = 4 - 0,25 = 3,75$

x_i	y_i
0,25	2
4	0,5

وبالتالي يكون $I(f) \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) \approx \frac{3,75}{2}(2 + 0,5) \approx 4,6875$

- حساب الخطأ الاعظمي : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow f''(x) = -\left(0 - \frac{2\sqrt{x} + 2x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{4x^2x}\right) = \frac{2\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}}{4x^3} = \frac{\frac{2x + x}{\sqrt{x}}}{4x^3} = \frac{\frac{3x}{\sqrt{x}}}{4x^3} = \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}$$

بما ان f(x) متناقصة فان القيمة العظمى على المجال هي [0.25 , 4] هي 0.25 :

$$\Rightarrow f''(\xi) = f''(0.25) = \frac{3}{4(0.25)^2\sqrt{0.25}} = 24$$

$$E_I = \left|\frac{h^3}{12}f''(\xi)\right| = \left|\frac{(3,75)^3}{12}24\right| = 105,46875$$

٢- طريقة سمبسون : $h = \frac{b-a}{2} = \frac{4-0,25}{2} = 1,875$

x_i	y_i
0,25	2
نقطة المنتصف $= \frac{a+b}{2} = \frac{0,25+4}{2} = 2,125$	0,685994
4	0,5

وبالتالي يكون : $I(f) \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$

$$I(f) \approx \frac{1,875}{3}[2 + (4)(0,685994) + 0,5] \approx 3,277485$$

حساب الخطأ الاعظمي :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\left(0 - \frac{2\sqrt{x} + 2x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{4x^2 x}\right) = -\left(0 - \frac{2\sqrt{x} + 2x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{4x^3}\right) = \frac{3}{4}\left(-\frac{\frac{4x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}}{x^5}\right) = \frac{3}{4}\left(-\frac{\frac{4x^2 + x^2}{2\sqrt{x}}}{x^5}\right)$$

$$f'''(x) = \frac{3}{4}\left(-\frac{5x^2}{2x^5\sqrt{x}}\right) = -\frac{15}{8x^3\sqrt{x}}$$

$$f^{(4)} = -\frac{15}{8}\left(0 - \frac{3x^2\sqrt{x} + x^3\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x^7}\right) = -\frac{15}{8}\left(-\frac{\frac{6x^3 + x^3}{2\sqrt{x}}}{x^7}\right) = \frac{15}{8}\left(\frac{\frac{7x^3}{2\sqrt{x}}}{x^7}\right) = \frac{105}{16x^4\sqrt{x}}$$

نلاحظ ان الدالة f(x) متناقصة وبالتالي القيمة العظمى على المجال [0.25 , 4] هي 0.25 :

$$\Rightarrow f^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(0,25) = \frac{105}{16(0,25)^4\sqrt{0,25}} = 3360$$

$$E_I = \left|\frac{h^5}{90}.f^{(4)}(\xi)\right| = \left|\frac{(1,875)^5}{90}.3360\right| = 865,1733398$$

٣- طريقة شبه المنحرف المركبة :

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4 - 0,25}{4} = 0,9375$$

$$x_i = a + h_i$$

n	0	1	2	3	4
x_i	0,25	1,1875	2,125	3,0625	4
y_i	2	0,9176629355	0,6859943406	0,5714285714	0,5

$$I(f) \approx \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4]$$

$$I(f) \approx \frac{0,9375}{2}[2 + (2)(0,9176629355) + (2)(0,6859943406) + (2)(0,5714285714) + 0,5] \approx 3,211017982$$

ايجاد الخطا الاعظمي : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f'''(x) = \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}$

بما ان الدالة f(x) متناقصة فان القيمة العظمى على المجال [0.25 , 4] هي 0,25 :

$$f''(x) = f''(0,25) = \frac{3}{4(0,25)^2\sqrt{0,25}} = 24$$

$$E_I = \left|\frac{h^2(b-a)}{12} f''(\xi)\right| = \left|\frac{(0,9375)^2(4-0,25)}{12}.24\right| = 6,591796875$$

٤- طريقة سمبسون المركبة :
$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0,25}{4} = 0,9375$$

n	0	1	2	3	4
x_i	0,25	1,1875	2,125	3,0625	4
y_i	2	0,9176629355	0,6859943406	0,5714285714	0,5

$$I(f) \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4]$$

$$I(f) \approx \frac{0,9375}{3}[2 + (4)(0,9176629355) + (2)(0,6859943406) + (4)(0,5714285714) + 0,5] \approx 3,071360847$$

حساب الخطأ الاعظمي :
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}$$

$$f'''(x) = -\frac{15}{8x^3\sqrt{x}} \Rightarrow f^{(4)}(x) = \frac{105}{16x^4\sqrt{x}}$$

بما ان الدالة f(x) متناقصة فان القيمة العظمى على المجال [0.25 , 4] هي 0.25 :

$$f^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(0,25) = \frac{105}{16(0,25)^4\sqrt{0,25}} = 3360$$

ومنه :

$$E_I = \left|\frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi)\right| = \left|\frac{(0,9375)^4(4-0,25)}{180} * 3360\right| = 54,07333374$$

انتهت المحاضرة

◁اصدقائي حرصاً على الدقة العلمية التي نسعى أن نقدمها لكم ، إليكم تصحيح أخطاء وردت بالمحاضرة الخامسة :

لقد ادرجنا في بداية المحاضرة الخامسة حل الوظيفة دون كتابة نص السؤال ^_^ و هو كالتالي :

◀**السؤال الاول:** لتكن لدينا الدالة $f(x) = x^3 + 2x + 2$ المطلوب :

١- اوجد تكرارين للجذر التقريبي للدالة السابقة الموجودة بالمجال[1- , 2-] باستخدام طريقة تنصيف المجال

٢- ماهي مرتبة التقارب هي هذه الطريقة ؟؟ **الحل**: مرتبة التقارب هي **P=1**

٣- ما هو عدد التكرارات الاعظمية اللازمة للحصول على دقة $\boldsymbol{\varepsilon = 0,0001}$

الحل:

الحل موجود في بداية المحاضرة الخامسة كامل وصحيح *_^

◄السؤال الثاني:

لتكن لدينا المعادلة $\boldsymbol{f(x) = e^x + x = 0}$ المطلوب:

١- حدد المجال الذي يحوي جذر للمعادلة السابقة من بين المجالين الاتيين [1- , 1.5-] و [0,5-, 0.75-] ثم استخدم طريقة تنصيف المجال للحصول على جذرين تقريبيين للمعادلة السابقة على ذلك المجال واحسب الخطأ المرتكب في حساب كل جذر؟؟

٢- ماهو عدد التكرارات الاعظمي اللازم للحصول على دقة $\boldsymbol{\varepsilon = 10^{-10}}$ ؟؟

٣- **الحل:**

الطلب الاول : لديناالدالة $\boldsymbol{f(x) = e^x + x}$ لنقول عن المجال [a,b] انه يحوي جذرا للدالة (عدد فردي من الجذور) يجب ان يحقق الشرط: **f(a).f(b)<0**

على المجال [1- , 1.5-] :

$$\boldsymbol{f(a) = f(-0,75) = -0,2776334473}$$

$$\boldsymbol{f(b) = f(-0,5) = 0,1065306597}$$

$$\boldsymbol{f(-0,75).f(-0,5) < 0}$$

وبالتالي بما ان الشرط $\boldsymbol{f(a).f(b) < 0}$ تحقق فالدالة تحوي عدد فردي من الجذور ضمن هذا المجال [0.5- , 0.75-]

n	a	b	$c = \frac{a+b}{2}$	f(a)	f(b)	f(c)	$E_{max} = \frac{b-a}{2}$
1	-0,75	-0,5	-0,625	-0,277633	0,106531	-0,089739	0,125
2	-0,625	-0,5	-0,5625	-0,089739	0,106531	0,0072830	0,0625

طريقة ثانية لحساب $\boldsymbol{E_{max}}$ المرتكب في كل جذر حيث : **n**=عدد التكرارات

عندما **n=1** يكون

$$E_{max} \leq \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow E_{max} \leq \frac{-0,5+0,75}{2^1} = 0,125$$

وعندما n=2 يكون

$$E_{max} \leq \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow E_{max} \leq \frac{-0,5+0,75}{2^2} = 0,0625$$

◄ملاحظة هاااامة :

الفرق بين القانونين $E_{max} = \frac{b-a}{2}$ و $E_{max} \leq \frac{b-a}{2^n}$ في طريقة تنصيف المجال هو ان :

في القانون الاول : $E_{max} = \frac{b-a}{2}$ عند تعويض a,b ناخذ قيم a,b الجدد من اخر تكرار

اما القانون الثاني : $E_{max} \leq \frac{b-a}{2^n}$ عند تعويض a,b ناخذ القيم الابتدائية التي حصلنا عليها من الجال[a , b] والذي يتغير في هذا القانون من تكرار لاخر هو الاس الموجود في المقام (وهو عدد التكرارات)

وكلا القانونين لهما نفس النتيجة والجواب.

الطلب الثاني من التمرين :

عدد التكرارات الاعظمي اللازم للحصول على دقة $\varepsilon = 10^{-10}$:

$$\frac{\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\log 2} < n \Rightarrow \frac{\log(2500000000)}{0,3010299957} = \frac{9,397940009}{0,3010299957}$$
$$= 31021928095 < n$$

نعلم ان n هي اول عدد صحيح يلي 31 واكبر منه وبالتالي n=32

إعداد: راما جوهر & هديل سعد & علا الدالاتي