◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: 18-19 عنوان المحاضرة: التكاملات التابعة لوسيط

سنكمل في هذه المحاضرة بحل بعض الأمثلة الهامة وسنتعرف على التكاملات التابعة لوسيط بالإضافة إلى مبرهنات عنها

مثال: أوجد التكامل

$$J=\int_0^{\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$$

$$J=\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}dx$$

هذا التكامل من الشكل:

$$B(p,q)=\int_0^{\infty}\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$$

حيث:

$$p-1=\frac{1}{4}\Rightarrow p=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$$

$$p+q=2\Rightarrow q=2-p=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$$

$$J=\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}dx=B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}$$

نذكر أن:

$$\frac{5}{4}=\frac{1}{4}+1\quad,\quad\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$

$$\Gamma(2)=\Gamma(1+1)=1.\Gamma(1)=1$$

ومنه:

$$J=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}{1}$$

$$J=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

حيث نلاحظ أنها من الشكل:

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)$$

فحسب قاعدة ليجاندر:

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)$$

بالعودة للمثال:

$$J=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\left(\frac{1}{4}\right)-1}}\Gamma\left(2\left(\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-\frac{1}{2}}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$J=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-\frac{1}{2}}}.\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{2}.\pi}{4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

مثال: أوجد التكامل

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,.\cos^n x\ dx \quad ; \quad m,n\in\mathbb{N}$$

حسب الشكل المثلثي للتكامل البتاوي:

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta\,.\cos^{2q-1}\theta\ d\theta$$

$$m=2p-1\Rightarrow 2p=m+1\Rightarrow p=\frac{m+1}{2}$$

Syria Math Team

$$n = 2q - 1 \Longrightarrow 2q = n + 1 \Longrightarrow q = \frac{n+1}{2}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^m\, x\, .\, cos^n\, x\ dx$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

و لنأخذ مثال عن حالة خاصة عندما $m = 6\,, n = 4$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^6\, x\, .\, cos^4\, x\ dx$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{12}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{5.4.3.2.1} \cdot \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

تم حساب $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ و $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ و $\Gamma(6)$

من القانون $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

حيث:

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

Syria Math Team

$$\Gamma(6) = 5!$$

وبالتالي بالاختصار نجد:

$$I = \frac{3\pi}{2^9} = \frac{3\pi}{512}$$

تمرين: احسب كلاً من التكاملين (تكاملي أولر)

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, cos\, x \;\; dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, x \;\; dx$$

إذا اخذنا $x = \frac{\pi}{2} - u$ في $J \Leftarrow dx = -du$

ملاحظة: لقد قمنا بتغيير المتحول حيث أخذنا $x = \frac{\pi}{2} - u$ والآن نعوض في Jكما نقوم بتغيير حدود التكامل لأننا استخدمنا تغيير المتحول.

$$J = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ln\, cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \; du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, u \;\; du = I$$

نلاحظ أنه أصبح نفس التكامل I

$$2I = I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, x \;\; dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, cos\, x \;\; dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (ln\, sin\, x + ln\, cosx\,) \;\; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, x\, cosx\, dx$$

حسب الدساتير المثلثية $sin\, 2x = 2\, sin\, x\, cos\, x$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln \frac{sin\, 2x}{2} \;\; dx$$

Syria Math Team

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (ln\, sin\, 2x - ln\, 2)\, dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, 2x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, 2\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, 2x\, dx - ln\, 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, 2x\, dx - ln\, 2\, [x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, 2x\, dx - \frac{\pi}{2} ln\, 2$$

لحساب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, 2x\, dx$ نقوم بتغيير المتحول نفرض $2x = t \Leftarrow dt = 2x \Leftarrow dx = \frac{1}{2} dt$

وبتغيير حدود التكامل $x = 0 \Rightarrow t = 0 \;,\; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \pi$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, 2x\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} ln\, sin\, t\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, t\, dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} lnsin\, t\, dt$$

لاحظ أن $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} ln\, sin\, t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, t\, dt$ومنه:

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, 2x\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} ln\, sin\, t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, t\, dt$$

$$\Rightarrow 2I = -\frac{\pi}{2} ln\, 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, t\, dt$$

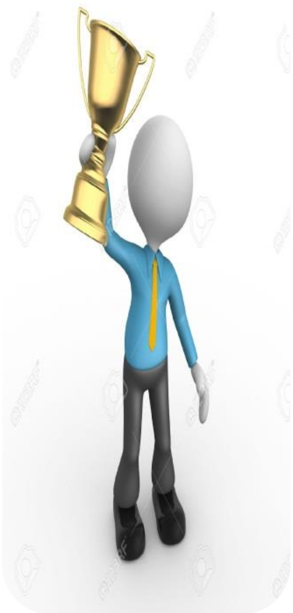
$$2I = -\frac{\pi}{2} ln\, 2 + I$$

Syria Math Team

$$2I - I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2}$$

$$\Rightarrow \boxed{J = -\frac{\pi}{2}\ln 2}$$



نستفيد من التكامل السابق لإيجاد قيمة تكامل جديد

$$-\frac{\pi}{2}\ln 2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$$

نكامل بالتجزئة: نفرض $\ln \sin x = u \Leftarrow du = \frac{\cos x}{\sin x}dx$

و $dv = dx \Leftarrow v = x$

بالتعويض:

$$-\frac{\pi}{2}\ln 2 = [u.v]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} v \, du$$

$$-\frac{\pi}{2}\ln 2 = [x.\ln \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

نلاحظ أن $[x.\ln \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$ ومنه:

$$-\frac{\pi}{2}\ln 2 = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cot x \, dx$$

$$\boxed{\frac{\pi}{2}\ln 2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}dx}$$

التكاملات التابعة لوسيط

ليكن لدينا التابع $f(x,t)$ معرف من أجل $x \in [a,b]$ و $t \in I = [t_1, t_2]$ و أنه من أجل قيمة مثبتة t من I يكون التابع $f(x,t)$ قابل للمكاملة على المجال $[a,b]$ و لنبدأ بالدراسة التالية :

Syria Math Team

تعريف : نسمي التكامل

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$$

حيث a, b تابعين لـt بالتكامل التابع للوسيط t معرف على I.

خواص :

مبرهنة (١) :

إذا كان التابع المكامل $f(x,t)$ مستمر على المستطيل المغلق

$$[a,b] \times [t_1, t_2] = \{(x,t): x \in [a,b], t \in [t_1, t_2]\}$$

حيث a, b, t_1, t_2 ثوابت حقيقية ، فإن التكامل

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$$

هو تابع مستمر بالنسبة للوسيط t.

البرهان :

لتكن $t_0 \in I$ نقطة كيفية من المجال I عندئذٍ نريد إثبات أن :

$$\forall \varepsilon > 0\ ;\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : |t - t_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |F(t) - F(t_0)| < \varepsilon$$

و لدينا فرضاً أن $f(x,t)$ مستمر من أجل كل t من I أي :

$$\forall \varepsilon > 0\ ;\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : |t - t_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x,t) - f(x,t_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

لنأخذ :

$$|F(t) - F(t_0)| = \left|\int_a^b f(x,t)dx - \int_a^b f(x,t_0)\,dx\right| = \left|\int_a^b \big(f(x,t) - f(x,t_0)\big)dx\right|$$

Syria Math Team

$$\leq \int_a^b |f(x,t)-f(x,t_0)|dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}dx = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}[x]_a^b = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

أي أن $F(t)$ مستمر عند t_0 و بما أن $t_0 \in [t_1,t_2]$ كيفية من $[t_1,t_2]$ نجد أن F(t) مستمر على المجال المغلق $[t_1,t_2]$.

◄ **نتيجة :** إذا كان التابع المكامل $f(x,t)$ مستمر على المستطيل المغلق $[t_1,t_2]\times[a,b]$ يمكن التبديل بين رمزي النهاية و التكامل فنكتب :

$$\lim_{t\to t_0}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b \lim_{t\to t_0} f(x,t_0)dx = \int_a^b \lim_{t\to t_0} f(x,t_0)dx$$

الوسيط هو t و المكاملة بالنسبة ل x

المحاضرة (١٩)

قاعدة لايبنتز :

مبرهنة(٢) : إذا كان التابع المكامل $f(x,t)$ و مشتقه الجزئي بالنسبة للوسيط أيt $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ مستمرين على المستطيل

$[a,b]\times[t_1,t_2]$فإن التابع $F(t)=\int_a^b f(x,t)dx$قابل للاشتقاق بالنسبة لـ t على المجال $[t_1,t_2]$

و يكون :

$$F'(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$$

الإثبات : لتكن $t, t+\Delta t$ نقطتين من المجال $[t_1,t_2]$ و لنأخذ :

$$F(t+\Delta t)-F(t) = \int_a^b f(x,t+\Delta t)dx - \int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \big(f(x,\Delta t)-f(x,t)\big)dx$$

و حسب دستور التزايدات المنتهية فإن :

$$\frac{\left(f(x,t+\Delta t)-f(x,t)\right)}{\Delta t}=\frac{\partial f(x,t+\theta\Delta t\,)}{\partial t}\quad : 0<\theta<1$$

و بالتالي نكتب :

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\int_a^b\frac{\left(f(x,t+\Delta t\,)-f(x,t)\right)}{\Delta t}dx$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما $\Delta t\to 0$ نحصل على :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\int_a^b\frac{\left(f(x,t+\Delta t\,)-f(x,t)\right)}{\Delta t}dx=\int_a^b\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(f(x,t+\Delta t\,)-f(x,t)\right)}{\Delta t}dx$$

$$\boxed{F'(t)=\frac{dF(t)}{dt}=\int_a^b\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx}$$

و ذلك لأن : $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ تابع مستمر على المستطيل R.

مثال :

أوجد $\frac{dF(t)}{dt}$ حيث : $F(t)=\int_0^1\ln(x^2+t^2)\,dx$

لنتحقق بدايةً من شروط مبرهنة لايبنتز :

لدينا التابع المكامل : $f(x,t)=\ln(x^2+t^2)$ مستمر على المستطيل $[0,1]\times[t_1,t_2]$ حيث $0<t_1$

كذلك فإن المشتق الجزئي $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial\ln(x^2+t^2)}{\partial t}=\frac{2t}{x^2+t^2}$ و هذا التابع أيضاً مستمر على المستطيل المذكور سابقاً ، فشروط قاعدة لايبنتز محقق. لذلك نكتب :

$$\frac{dF(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\int_0^1\ln(x^2+t^2)\,dx=\int_0^1\frac{\partial\ln(x^2+t^2)}{\partial t}dx=\int_0^1\frac{2t}{x^2+t^2}dx$$

$$=\left[2\arctan\left(\frac{x}{t}\right)\right]_{x=0}^{x=1}=2\arctan\left(\frac{1}{t}\right)$$

و لكي نعرف تماماً ما هي فائدة قاعدة لايبتنز ، سنعيد حل التمرين السابق دون الاستفادة من قاعدة لايبتنز و ذلك بأن نجري المكاملة أولاً ثم نوجد المشتق.

$$F(t) = \int_0^1 \ln(x^2 + t^2)\, dx$$

نكامل بالتجزئة فنفرض :

$$u = \ln(x^2 + t^2) \Rightarrow du = \frac{2x}{x^2 + t^2} dx$$

$$dv = dx \Longrightarrow v = x$$

إذن يكون :

$$F(t) = [x ln(x^2 + t^2)]_{x=0}^{x=1} - 2\int_0^1 \frac{x^2 + t^2 - t^2}{x^2 + t^2} dx$$

$$= \ln(1 + t^2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{t^2}{x^2 + t^2}\right) dx = \ln(1 + t^2) - 2[x]_{x=0}^{x=1} + 2\left[t arctan\left(\frac{x}{t}\right)\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$\Longrightarrow F(t) = ln(1 + t^2) - 2 + 2\, arctan\frac{1}{t}$$

الآن و قد أوجدنا $F(t)$ نوجد مشتقه بالنسبة للمتحول المستقل t

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(ln(1 + t^2) - 2 + 2t\, arctan\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{2t}{1 + t^2} - 0 + 2\, arctan\left(\frac{1}{t}\right) + 2\frac{-\frac{1}{t^2}}{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2}.t = 2\, arctan\left(\frac{1}{t}\right)$$

نلاحظ أنه حصلنا على نفس النتيجة و لكن بكلفة أكبر بسبب الحاجة لإجراء المكاملة أولاً بطريقة التجزئة ..لذا استخدام قاعدة لايبتنز كان مفيداً جداً .

تعريف : نقول عن التكامل المعتل التابع لوسيط $F(t) = \int_a^\infty f(x,t)dx$ حيث $x \geq a, t_1 \leq t \leq t_2$ إنه متقارب بانتظام بالنسبة لـ t إذا وجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد K_ε بحيث يكون :

$$\left|\int_a^{\infty} f(x,t)dx - \int_a^{\eta} f(x,t)dx\right| = \left|\int_{\eta}^{\infty} f(x,t)dx\right| < K_{\varepsilon}$$

و ذلك لكل $\eta > K_{\varepsilon}$.

◄**ملاحظة** : يمكن تطبي قاعدة لايبتنز على التكاملات المعتلة التابعة لوسيط .

مبرهنة (٣): إذا كان التابع $f(x,t)$ مستمراً من أجل $x \geq a$ و $t_1 \leq t \leq t_2$ و كان التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x,t)dx$ متقارب بانتظام بالنسبة لـ $t \in [t_1,t_2]$ فإن التابع $F(t) = \int_a^{\infty} f(x,t)dx$ يكون مستمراً على المجال $[t_1,t_2]$.

مثال: أثبت أن $F(t)$ تابع مستمر على مجموعة الأعداد الحقيقية R حيث :

$$F(t) = \int_1^{\infty} \frac{t^2 - x^2}{(x^2+t^2)^2} dx$$

الحل: لدينا $f(x,t) = \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}$ تابع مستمر من أجل كل $t \in [t_1,t_2]$ و $x \in [1,\infty[$ و نثبت أن التكامل المعطى متقارب بانتظام بالنسبة لـ t :

ليكن $\varepsilon > 0$ فيوجد $K_{\varepsilon} \geq \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{\text{نضعها بعد الحل}}$ بحيث :

$$\left|\int_{\eta}^{\infty} f(x,t)dx\right| = \left|\int_{\eta}^{\infty} \frac{t^2-x^2}{(t^2+x^2)^2} dx\right| = \left|\left[\frac{x}{t^2+x^2}\right]_{x=\eta}^{\infty}\right| = \frac{\eta}{\eta^2+t^2} < \frac{1}{\eta} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \eta > \frac{1}{\varepsilon}$$

إذاً $F(t)$ هو تكامل متقارب بانتظام بالنسبة لـt من R ومنه وحسب المبرهنة ٣ يكون $F(t)$ مستمر بالنسبة لـt من $[t_1,t_2]$ $\quad 1 \leq x < \infty$

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد أنس القزاز - لانا شهاب