◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة: الثامنة عشر ◄ عنوان المحاضرة: الجداء المباشر

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-سوف نتابع في خواص الجداء المباشر.

٢- المجموع المباشر للزمر.

لنكمل في خواص الجداء المباشر:

تمهيدية: لتكن G_1 و G_2 زمرتين عندئذٍ

١) كل من $G_1 \oplus <e_2>\,,\, <e_1> \oplus G_2$ زمرة جزئية في الزمرة $G_1 \oplus G_2$

٢) $G_1 \cong G_1 \oplus <e_2>$ و $G_2 \cong <e_1> \oplus G_2$

البرهان:

١) لدينا $G_1 \oplus <e_2> = \{(a, e_2)\ ;\ a \in G_1\} \subseteq G_1 \oplus G_2$
"وهي مجموعة جزئية من $G_1 \oplus G_2$ وغير خالية لأن :

$$(e_1, e_2) \in G_1 \oplus <e_2>$$

ليكن $(a, e_2)\,(b, e_2) \in G_1 \oplus <e_2>$ حيث $a, b \in G_1$

فإن : $(a, e_2)(b, e_2)^{-1} = (a, e_2)\,(b^{-1}, e_2^{-1})$

$$= \left(\underbrace{ab^{-1}}_{\in G_1}, e_2\right) \in G_1 \oplus <e_2>$$

وهذا يبين أن المجموعة $G_1 \oplus <e_2>$ زمرة جزئية في $G_1 \oplus G_2$ وبنفس الطريقة نبرهن المجموعة الثانية.

٢) لنعرف العلاقة : $\varphi : G_1 \to G_1 \oplus <e_2>$ بالشكل الاتي:

$$\forall\ a \in G_1 \quad ;\ \varphi(a) = (a, e_2)$$

إن φ تطبيق ومتباين لان :

$$\forall\ a, b\ \in G_1\ : a = b\,;\ (a, e_2) = (b, e_2)$$

$$\Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

وإن φ تشاكل لأن:

$$\varphi(a.b\,) = (a.b\,, e_2) = (a, e_2).(b, e_2) = \varphi(a).\varphi(b)$$

كما أن φ غامر لأنه إذا كان

فإن $(d, e_2) \in G_1 \oplus < e_2 >$ $d \in G_1$ ومنه: $\varphi(d) = (d.e_2)$

ومنه φ تماثل .

نتيجة: كل زمرة يمكن النظر اليها على انها جداء خارجي لزمرتين او اكثر.

- لنورد من خلال المبرهنة التالية طريقة لحساب مرتبة عنصر من الجداء المباشر للزمر وذلك بالاعتماد على مراتب المركبات .

مبرهنة:

لتكن G_1, G_2 زمرتين ولنفرض ان $(g_1, g_2) \in G_1 \oplus G_2$ عندئذ:

$$o(g_1, g_2) = Icm\big(o(g_1), o(g_2)\big)$$

أي أن : مرتبة كل عنصر من الجداء المباشر لزمرتين يساوي المضاعف المشترك الأصغر لمراتب المركبات.

البرهان :

لنفرض أن :

$$o(g_1) = n \quad , \qquad o(g_2) = m\,, \qquad o((g_1, g_2)) = t \ \ , \ \ Icm(n, m) = S$$

لنبدأ من مرتبة الثنائية : لما كان $o((g_1, g_2)) = t$ فإن :

$$(g_1, g_2)^t = (e_1, e_2)$$

$$(g_1^t, g_2^t) = (e_1, e_2) \Rightarrow g_1^t = e_1 \;\;,\;\; g_2^t = e_2$$

وبالتالي فإن n يقسم t و m يقسم t

ومنه t مضاعف لكل من n, m ومنه $s \leq t$

ومن جهة أخرى: لما كان $s = lcm(m, n)$ فإن : s يقبل القسمة على كل من n, m

ومنه يوجد $\alpha, \beta \in Z$:

$$s = \beta . m$$

$$s = \alpha . n$$

وبالتالي : $(g_1, g_2)^s = (g_1^s, g_2^s) = \left(g_1^{\alpha . n}, g_2^{\beta . m}\right) = \left((g_1^n)^\alpha, (g_2^m)^\beta\right) = (e_1, e_2)$

بما ان $o((g_1, g_2)) = t$ و $(g_1^s, g_2^s) = (e_1, e_2)$ وحسب مبرهنة سابقة نجد ان:

t يقسم s ; $\forall s \in Z \;: g^s = e \Leftarrow t \leq s$ ومنه $t = s$

نتيجة: يمكن تعميم النص السابق ل n زمرة .

لتكن $G_1, G_2, \ldots G_n$ أسرة منتهية من الزمر ولنفرض أن : $(g_1, g_2, \ldots g_n) \in G_1 \oplus G_2 \ldots . G_n$

عندئذٍ : $o\left((g_1, g_2, \ldots g_n)\right) = lcm\left(o(g_1), o(g_2), \ldots o(g_n)\right)$

الآن لنورد إحدى الحالات الخاصة التي تعطينا الشرط اللازم والكافي لكي يكون الجداء المباشر لزمر دوارة منتهية هو زمرة دوارة.

مبرهنة: لتكن H, K زمرة دوارة منتهية ولنفرض ان $(K : 1) = m \;\;,\;\; (H : 1) = n$

إن الشرط اللازم والكافي كي تكون $H \oplus K$ دوارة.

هو أن يكون $gcd(n, m) = 1$

البرهان :

لنفرض أن $H =< a > : a \in H \quad , \quad K =< b >: b \in K$

عندئذٍ : $(H \oplus K: 1) = n.m \; , \; o(a) = n \,, o(b) = m$

◄لزوم الشرط :

لنفرض أن $H \oplus K$ دوارة ولنبرهن أن $gcd(n, m) = 1$

لنفرض جدلا أن $gcd(n, m) = d > 1$ لما كان d يقسم n $\quad o(a) = n$ فإن:

$$a^{\frac{n}{d}} \in H \quad , \qquad o\left(a^{\frac{n}{d}}\right) = d$$

$$\left(a^{\frac{n}{d}}, e_k\right) \in H \oplus K \,, \rightarrow o\left(a^{\frac{n}{d}}, e_k\right) = d$$

$$\Rightarrow \left(< a^{\frac{n}{d}}, e_k >: 1\right) = d \Rightarrow o\left(a^{\frac{n}{d}}\right) = d \Rightarrow a^{\frac{n}{d}} \neq e_H$$

ولما كان d يقسم m ، $o(b) = m$ فإن:

$$b^{\frac{m}{d}} \in k \,, o\left(b^{\frac{m}{d}}\right) = d$$

$$\left(e_H \,, b^{\frac{m}{d}}\right) \in H \oplus K \Rightarrow o\left(e_H, b^{\frac{m}{d}}\right) = d$$

$$\Rightarrow \left(< e_H, b^{\frac{m}{d}} >: 1\right) = d \Rightarrow o\left(b^{\frac{m}{d}}\right) = d \Rightarrow b^{\frac{m}{d}} \neq e_k$$

ومنه : $(a^{\frac{n}{d}}, e_k) \neq (e_H, b^{\frac{m}{d}})$ وبالتالي : $< \left(a^{\frac{n}{d}}, e_k\right) > \neq < \left(e_H, b^{\frac{m}{d}}\right) >$

وهذا غير ممكن وبالتالي : $gcd(n, m) = 1$

كفاية الشرط : لنفرض ان $gcd(n, m) = 1$ ولنأخذ الزمرة الجزئية $< (a, b) > \subseteq H \oplus K$

إن : $o\big((a, b)\big) = Icm\big(o(a), o(b)\big) = Icm(n, m) = n.m$

لأن n, m اوليان فيما بينهما.

مجموعتين منتهيتين إحداهما محتواه في الاخر ولهما نفس الكمية من العناصر .

$$\Rightarrow H \oplus K =< (a, b) >$$

ومنه $H \oplus K$ دوارة.

مثال: لنأخذ الزمرتين : Z_2, Z_5 هل الجداء لهما زمرة دوارة؟

الحل:

$Z_2 \oplus Z_5 \cong Z_{10}$ نعم دوارة لأن كل من الزمرتين دوارة ومراتبهم اعداد أولية فيما بينهما.

مثال: لنأخذ الزمرتين Z_3, Z_9 هل الجداء لهما زمرة دوارة؟

الحل:

$Z_3 \oplus Z_9 \ncong Z_{27}$ لا، لأن المراتب ليست أعداد أولية فيما بينهما - زمرة الجداء ليست دوارة.

نتيجة: ليكن $m = n_1 . n_2 \dots n_t$ عندئذٍ : $Z_m \cong Z_{n1} \oplus Z_{n2} \oplus \quad \dots . Z_{nt}$

عندما وفقط عندما : $gcd(n_i, n_j) = 1 \ \forall i \neq j$

مثال:

$$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_5 \cong \begin{cases} Z_2 \oplus Z_6 \oplus Z_5 \\ Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_{15} \cong Z_2 \oplus Z_{30} \end{cases}$$

$$Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_5 \cong \longrightarrow Z_6 \oplus Z_{10} \ncong Z_{60}$$

((المجموع المباشر للزمر)):

تعريف:

لتكن G زمرة و H, K زمر جزئية ناظمية في G ، نقول ان G مجموع مباشر للزمرتين H, K اذا كان :

١) $G = H, K$.

٢) $H \cap K =< e >$ ونرمز له $G = H \times K$

تمهيدية:

لتكن G زمرة و H, K زمر جزئية ناظمية في G .

اذا كان $H \cap K =< e >$ عندئذٍ:

$$\forall h \in H , k \in K ; h.R = R.h$$

البرهان:

لنأخذ العنصر : $h.R.h^{-1}.R^{-1} = \Big(\underbrace{h.R.h^{-1}}_{\in k}\Big) R^{-1} \in kR^{-1} = k$

$$h.R.h^{-1}.R^{-1} = h\Big(\underbrace{R.h.R^{-1}}_{\in H}\Big) \in h.H = H$$

$$\Rightarrow h.R.h^{-1}.R^{-1} \in H \cap k =< e >$$

$$\Rightarrow h.R.h^{-1}.R^{-1} = e$$

$$\Rightarrow h.R = R.h$$

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا همج