نظري

◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄المحاضرة : الثامنة عشرة عنوان المحاضرة: أبراج JH

مبرهنة شروير : ليكن M مودول على الحلقة A ولتكن :

$$(S_1) : M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \dots\dots \supsetneqq M_r = 0$$
$$(S_2) : M = N_0 \supsetneqq N_1 \supsetneqq \dots\dots \supsetneqq N_t = 0$$

سلسلتين للمودول M عندها توجد S تغطية لـ S_1 و S' تغطية لـ S_2 بحيث S, S' متكافئتين .

البرهان

لنأخذ
$$M_{ij} = M_{i+1} + (M_i \cap N_j) \quad (1)$$
$$i = 0, 1, \dots\dots, r-1 \qquad j = 0, 1, \dots\dots, t$$

ولنأخذ
$$N_{ij} = N_{j+1} + (N_j \cap M_i) \quad (2)$$
$$i = 0, 1, \dots\dots, r \qquad j = 0, 1, \dots\dots, t-1$$

مودولات جزئية من M

نلاحظ أن بتعويض $j = 0$ في العلاقة (1):
$$M_{i0} = M_{i+1} + \big(\underbrace{M_i \cap N_0}_{M_i}\big) = M_{i+1} + M_i$$

وأن $M_{i+1} \subset M_i$ وبالتالي يصبح لدينا $M_{i0} = M_i$

وايضاً بالمتابعة من اجل العنصر $j = t$ و $i = i - 1$ في العلاقة (1) :

$$M_{i-1,t} = M_i + (M_{i-1} \cap 0) = M_i$$

وبالتالي يصبح لدينا $M_{i-1,t} = M_i$ ويصبح لدينا $M_{i0} \overset{*}{=} M_i \overset{**}{=} M_{i-1,t}$

سنحاول إيجاد تغطية ل S_1 عن طريق S_2 وبالتالي يكون لدينا :

من اجل اول عنصر	من اجل كل t
$N_0 \supset N_1$ $(M_i \cap N_0) \supset (M_i \cap N_1)$ $M_{i+1} + (M_i \cap N_0) \supset M_{i+1} + (M_i \cap N_1)$ $\Longrightarrow \; M_{i\,0} \supset M_{i\,1}$	$N_{t-1} \supset N_t$ $(M_i \cap N_{t-1}) \supset (M_i \cap N_t)$ $M_{i+1} + (M_i \cap N_{t-1}) \supset M_{i+1} + (M_i \cap N_t)$ $\Longrightarrow \; M_{i\,t-1} \supset M_{i\,t}$

<u>**وأخيرا اصبح لدينا**</u>

$$(S_1') \;:\; M = M_{0\,0} \overset{\text{من}*}{\widehat{=}} M_0 \overset{N_0 \supset N_1 \text{ من}}{\widehat{\supset}} M_{0\,1} \supset M_{0\,2} \supset \ldots\ldots \supset M_{0\,t} \overset{\text{من}**}{\widehat{=}} M_1 \overset{\text{من}*}{\widehat{=}} M_{1\,0}$$

$$\supset M_{1\,1} \supset M_{1\,2} \supset \ldots\ldots \supset M_{r-1,t} \overset{\text{من}**}{\widehat{=}} M_r = 0$$

وكذلك :

$$N_{0j} = N_j = N_{r,j-1}$$

ويصبح لدينا :

$$(S_2')\;\; M = N_{0\,0} = N_0 \supset N_{1\,0} \supset \;\ldots . \supset N_{r\,0} = N_1 = N_{0\,1} \supset \ldots \supset N_{r,t-1} = N_t = 0$$

لندرس عوامل السلسلتين $\grave{S}_1$ و S_2'

$$\left.\begin{aligned} \frac{M_{ij}}{M_{i,j+1}} &= \frac{M_{i+1} + (M_i \cap N_j)}{M_{i+1} + (M_i \cap N_{j+1})} \\ \frac{N_{ij}}{N_{i+1,j}} &= \frac{N_{j+1} + (N_j \cap M_i)}{N_{j+1} + (N_j \cap M_{i+1})} \end{aligned}\right\} \cong \underbrace{\frac{M_i \cap N_j}{(M_i \cap N_{j+1}) + (N_j \cap M_{i+1})}}_{\text{وحسب مبرهنة التماثل الرابعة}}$$

ومنه نجد أن

$$\underbrace{\frac{M_{ij}}{M_{i,j+1}}}_{S_1'\text{عوامل السلسلة}} \cong \underbrace{\frac{N_{ij}}{N_{i+1,j}}}_{S_2'\text{عوامل السلسلة}}$$

ومنه بإهمال الحدود المتكررة في S_1' وباهمال الحدود المتكررة في S_2' نحصل على سلسلتين S', S على الترتيب بحيث يتحقق ما يلي

١) طول S = طول S'

٢) العوامل في S تماثل عوامل S'

٣) S تغطية ل S_1 و S' تغطية ل S_2

<u>**وبالتالي نجد أن S, S' تغطيتين متكافئتين .**</u>

<u>**مبرهنة :**</u> إن أبراج جوردان هولدر هي أبراج اعظمية (أي لا تملك تغطية فعلية لها).

(إن وجود كلمة هي في نص المبرهنة تعني اذا وفقط اذا)

البرهان :

⇐ ليكن M مودول عل الحلقة A وليكن $(S) \,:\; M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \;\ldots\ldots . \supsetneqq M_r = 0$

برج JH ل M ولنثبت أن S برج أعظمي

لنفرض وجود مودول N جزئي من M بحيث : $M_i \supset N \supset M_{i+1}$ عندئذ :

N/M_{i+1} مودول جزئي من M_i/M_{i+1} وبما أن S هو برج JH فإن M_i/M_{i+1} مودول بسيط إذاً :

$$\frac{N}{M_{i+1}} = \begin{cases} \frac{M_{i+1}}{M_{i+1}} = 0 \\ \frac{M_i}{M_{i+1}} \end{cases}$$

وبالتالي N إما أن تساوي M_{i+1} أو أن تساوي M_i وبالتالي لا يوجد تغطية فعلية لـ S .

$\Rightarrow$ ليكن $(S): M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \dots\dots \supsetneqq M_r = 0$ برج أعظمي للمودول M

ولنبرهن أن S هي برج JH أي لنبرهن أن M_i/M_{i+1} مودول بسيط .

لنفرض $\frac{N}{M_{i+1}}$ مودول جزئي من M_i/M_{i+1} (وذلك حسب مبرهنة التقابل)

ويكون $M_i \supset N \supset M_{i+1}$ ولكن S سلسلة اعظمية اذا :

$N = M_i$ او $N = M_{i+1}$ وبالتالي $\frac{N}{M_{i+1}} = \frac{M_i}{M_{i+1}}$ أو $\frac{N}{M_{i+1}} = \frac{M_{i+1}}{M_{i+1}} = 0$

اذا $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ بسيط وبالتالي البرج هو برج JH وبذلك يتم المطلوب .

مبرهنة : أي برجين ل JH متكافئين .

البرهان

ليكن S_1, S_2 برجين JH للمودول M عندئذ حسب مبرهنة شروير يوجد S, S' تغطية ل S_1, S_2 على الترتيب بحيث S, S' متكافئتين .

ولكن S_1 برج JH اذاً $S = S_1$ (حسب مبرهنة سابقة)

وايضاً S_2 برج JH اذاً $S' = S_2$ (حسب مبرهنة سابقة)

لكن S, S' متكافئتين اذاً S_1 و S_2 متكافئتين .

ملاحظة : يمكن دمج هذه المبرهنة مع المبرهنة السابقة علماً أن أسئلة الامتحان تأتي واضحة ويتم التنويه في ورقة الامتحان على ذلك .

انتهت المحاضرة

حل وظيفة المحاضرة السابقة

١) ليكن $M = M_1 \times M_2$ حيث M_1, M_2 مودولات بسيطة والمطلوب كتابة جميع الأبراج وإيجاد برج JH.

الحل

المودولات الجزئية من M_1 هي $M_1, 0$ لان M_1 مودول بسيط.

والمودولات الجزئية من M_2 هي $M_2, 0$ لان M_2 مودول بسيط.

ولنوجد المودولات الجزئية من M وهي

$$0\times 0 \quad , \quad 0\times M_2 \quad , \quad M_1\times 0 \quad , \quad M_1\times M_2$$

ولنوجد أبراج المودول M.

$$M_1\times M_2 \underbrace{\supsetneq}_{\text{العامل هو } M_1 \cong M_1\times M_2/0\times M_2 \text{ وهو بسيط}} 0\times M_2 \underbrace{\supsetneq}_{\text{العامل هو } M_2 \cong 0\times M_2/0\times 0 \text{ وهو بسيط}} 0\times 0 \quad (1)$$

ومنه (1) برج JH لـ M.

$$M_1\times M_2 \underbrace{\supsetneq}_{\text{العامل هو } M_2 \cong M_1\times M_2/M_1\times 0 \text{ وهو بسيط}} M_1\times 0 \underbrace{\supsetneq}_{\text{العامل هو } M_1 \cong M_1\times 0/0\times 0 \text{ وهو بسيط}} 0\times 0 \quad (2)$$

ومنه (2) برج JH لـ M.

$$M_1\times M_2 \underbrace{\supsetneq}_{\text{العامل هو } M_1\times M_2 \text{ وهوغير بسيط}} 0\times 0 \quad (3)$$

ومنه (3) ليس برج JH لـ M.

٢) أوجد جميع سلاسل $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

الحل

الزمر الجزئية من $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ هي $\left(\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}, \frac{2\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}, \frac{4\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}, \frac{3\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}, \frac{6\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}, 0\right)$ ومنه السلاسل هي

$\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supsetneq 0$	$\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supsetneq \frac{2\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supsetneq 0$	$\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supsetneq \frac{4\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supsetneq 0$	$\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supsetneq \frac{3\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supsetneq 0$
$\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supsetneq \frac{6\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supsetneq 0$	$\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supsetneq \frac{2\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supsetneq \frac{4\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supsetneq 0$	$\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supsetneq \frac{3\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supsetneq \frac{6\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supsetneq 0$	$\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supsetneq \frac{2\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supsetneq \frac{6\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \supsetneq 0$

إعداد: لبنى الطون – احمد أبو النوت – شهد الحايك البوشي