◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄المحاضرة :السادسة عشرة   عنوان المحاضرة :حل مسائل

سنقوم أصدقائي في هذه المحاضرة بحل المسألة الواردة في المحاضرة السابقة .

" حل المسألة من المحاضرة السابقة "

ليكن (AB) قضيب طوله (2ℓ) يتحرك في المستوي الثابت (x_1y_1) بحيث تنزلق النقطة (A) من القضيب على (o_1x_1) بسرعة ثابتة قيمتها (v) وتتحرك النهاية (B) منه في المستوي (x_1y_1) بحيث تبقى قيمة سرعتها ثابتة $\vec{v}(\mathrm{B}) = v$, كان القضيب في لحظة البدء منطبقا على (o_1y_1) **والمطلوب** :

-1 عين معادلات الحركة

-2 أوجد مسار النقطة (B)

-3 عين القاعدة والمتدحرج والمركز الآني للدوران **((تحليلياً))**

-4 عين المركز الآني للدوران **((هندسياً))**

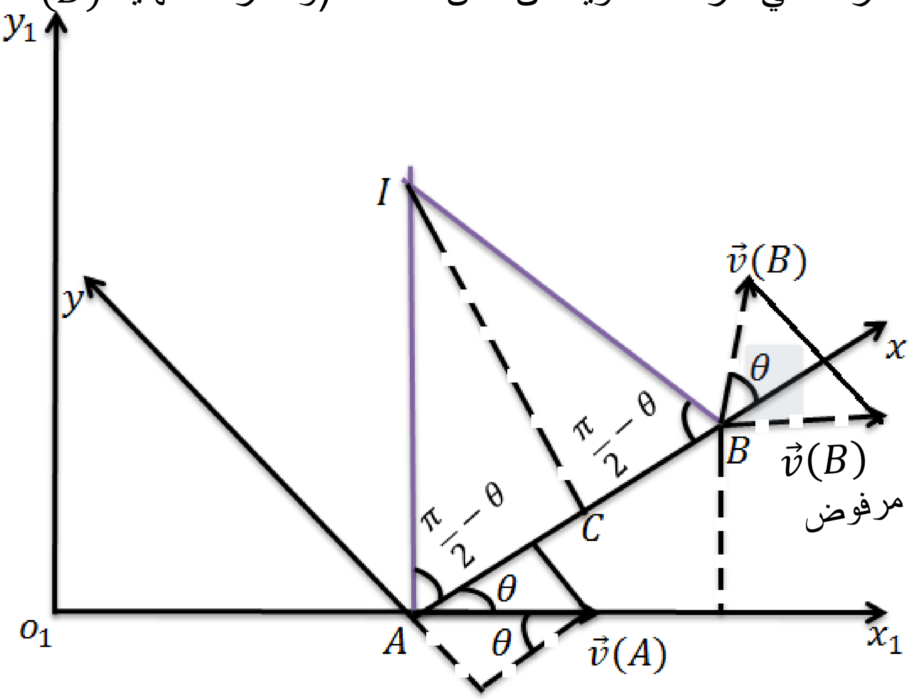
-5 أوجد تسارع النقطة (B)

-6 أوجد مركز التسارع المعدوم .

-7 عين النقطة من القضيب ذات السرعة الصغرى في اللحظة المذكورة .

الحل :

نلاحظ أن الحركة هي حركة مستوية من نص المسألة (وتتحرك النهاية (B) منه في المستوي (x_1y_1))



1) تعيين معادلات الحركة

نختار النقطة $A(x_A, y_A)$ قطب للحركة لأن منحاها معروف ونختار θ الزاوية بين المحور ox_1 والقضيب AB المحمول على المحور ox .

وبما أن : $|\vec{v}(A)| = v$

$$x_A = \int v\,dt = vt + c$$

بتعويض شروط البدء $t = 0$ كانت $x_A = 0$ ومنه نجد $c = 0$ وبالتالي :

$$x_A = vt \ldots (1) \quad , \quad y_A = 0 \ldots (2)$$

لإيجاد الزاوية θ نستفيد من علاقة السرعة للنقطة B :

$$\vec{v}(\mathrm{B}) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

حيث نعلم أن الزاوية θ بين المستقيم المتماسك والمستقيم الثابت ، ولدينا من علاقة سرعة B السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ التي لها علاقة بالزاوية θ .

وإن $\overrightarrow{AB} = 2\ell.\cos\theta\,.\vec{\imath_1} + 2\ell.\sin\theta\,.\vec{\jmath_1}$

$$\Longrightarrow \vec{v}(B) = v\vec{\imath_1} + \begin{vmatrix} \vec{\imath_1} & \vec{\jmath_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \omega = \theta' \\ 2\ell.\cos\theta & 2\ell.\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(B) = (v - 2\ell\theta'.\sin\theta)\vec{\imath_1} + 2\ell\theta'.\cos\theta\,\vec{\jmath_1}$$

لكن حسب الفرض : $|\vec{v}(B)| = v \Longrightarrow v^2 = |\vec{v}(B)|^2$

$$v^2 = (v - 2\ell\theta'.\sin\theta)^2 + (2\ell\theta'.\cos\theta)^2$$

$$\Longrightarrow v^2 = v^2 - 4\ell.v.\theta'.\sin\theta + 4\ell^2\theta'^2.\sin^2\theta + 4\ell^2.\theta'^2.\cos^2\theta$$

$$\Longrightarrow 0 = -4\ell v\theta'.\sin\theta + 4\ell^2\theta'^2$$

$$\Longrightarrow v.\sin\theta = \ell\theta' \quad \Longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{\ell}.\sin\theta$$

$$\boxed{\Longrightarrow \frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{v}{\ell}dt \ldots\ldots (*)}$$

تذكرة : نجري تغيير متحول

$$\tan\frac{\theta}{2} = u \quad ,\cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2} ,\sin\theta = \frac{2u}{1+u^2}, d\theta = \frac{2du}{1+u^2}$$

بتعويض قيمة $d\theta \ , \ \sin\theta$ في المعادلة $(*)$ نجد :

$$\frac{\dfrac{2du}{1+u^2}}{\dfrac{2u}{1+u^2}} = \frac{v}{\ell}dt \Longrightarrow \frac{du}{u} = \frac{v}{\ell}dt$$

ومنه بالمكاملة نجد :

$$\Rightarrow \int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| \Rightarrow \boxed{\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \ln|\tan\frac{\theta}{2}|}$$

ممكن في الامتحان ان نعتبره تكامل شهير

$$\Rightarrow \ln\tan\frac{\theta}{2} = \frac{v}{\ell}t + c$$

بتعويض شروط البدء $t = 0$ كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$ ومنه نجد $c = 0$ وبالتالي :

$$\Rightarrow \ln\tan\frac{\theta}{2} = \frac{v}{\ell}t \Rightarrow v.t = \ell.\ln\tan\frac{\theta}{2} \dots\dots (*)$$

$$\Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = e^{\frac{v}{\ell}t} \Rightarrow \theta = 2arc\tan e^{\frac{v}{\ell}t} \dots\ (3)$$

ومنه يكون $(1), (2), (3)$ هي معادلات الحركة .

2) إيجاد مسار النقطة B

$$\overrightarrow{o_1B} = \overrightarrow{o_1A} + \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{o_1B} = v.t\,\vec{\imath_1} + 2\ell.\cos\theta\,\vec{\imath_1} + 2\ell.\sin\theta\,\vec{\jmath_1}$$

$$x_1(B) = \underbrace{v.t}_{\text{نعوض في*}} + 2\ell.\cos\theta \quad , \qquad y_1(B) = 2\ell.\sin\theta$$

$$\left.\begin{aligned} x_1(B) &= \ell.\ln\tan\frac{\theta}{2} + 2\ell.\cos\theta \\ y_1(B) &= 2\ell.\sin\theta \end{aligned}\right\}$$

المعادلات الوسيطية لمسار B

3) تعيين القاعدة والمتدحرج والمركز الآني للدوران (تحليلياً)

بفرض احداثيات المركز الآني للدوران

في جملة ثابتة $I(X_1, Y_1)$ هو :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{\omega^2}.\vec{\omega}\wedge\vec{v}(A) \Rightarrow (X_1 - x_A, Y_1 - y_A) = \frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix} \vec{\imath_1} & \vec{\jmath_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \omega \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 - vt = 0 &\Rightarrow X_1 = vt = \ell.\ln\tan\frac{\theta}{2} \\ Y_1 - 0 = \frac{v}{\omega} &\Rightarrow Y_1 = \frac{v}{\theta'} = \frac{\ell}{\sin\theta} \end{aligned}\right\}$$

المعادلات الوسيطية للقاعدة

ومنه احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة الثابتة هو $I\left(\ell.\ln\tan\frac{\theta}{2}, \frac{\ell}{\sin\theta}\right)$

في جملة متماسكة $I(X, Y)$ هو :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{\omega^2}.\vec{\omega}\wedge\vec{v}(A)$$

هنا يجب اسقاط سرعة النقطة A من الجملة الثابتة الى الجملة المتحركة

$$\vec{v}(A) = v\vec{\imath_1} \Rightarrow \vec{v}(A) = v(\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath})$$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{\omega^2}.\vec{\omega} \wedge \vec{v}(A) \Longrightarrow (X-0, Y-0) = \frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ v.\cos\theta & -v.\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$X = \frac{v}{\omega}.\sin\theta = \ell$ المتدحرج هو محور القضيب

$$Y = \frac{v}{\omega}.\cos\theta$$

ومنه احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة هو $I\left(\ell, \frac{v}{\omega}.\cos\theta\right)$

4) تعيين المركز الآني للدوران (هندسياً)

نقوم أولاً بتعيين منحى شعاع سرعة النقطة B وذلك باستخدام نظرية المساقط على النقطتين A, B

$$\vec{v}(A).\overrightarrow{AB} = \vec{v}(B).\overrightarrow{AB}$$

$$|\vec{v}(A)|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos\theta = |\vec{v}(B)|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos\varphi$$

$$\cos\theta = \cos\varphi \Longrightarrow \varphi = \begin{cases} \theta & \text{مقبولة} \\ -\theta & \text{مرفوضة} \end{cases}$$

$\varphi = -\theta$ مرفوضة لأنها تحقق أن $\vec{v}(A)$ توازي $\vec{v}(B)$ ، كما أنه لدينا $|\vec{v}(A)| = |\vec{v}(B)|$ وبالتالي فإن $\vec{v}(A) = \vec{v}(B)$ أي أن الحركة انسحابية وهذا مرفوض .

وبفرض احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة الثابتة هي $I(X_1, Y_1)$ عندئذٍ :

$$X_1(I) = o_1A = vt = \ell.\ln\tan\frac{\theta}{2}$$

$$Y_1(I) = AI = \frac{\ell}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \frac{\ell}{\sin\theta}$$

المعادلات الوسيطية للقاعدة هندسيا

وبفرض احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة هي $I(X, Y)$ عندئذٍ :

$$X = Ac = \ell$$

$$Y = cI = AI.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \Longrightarrow Y = \frac{\ell}{\sin\theta}.\cos\theta = \ell.\cot\theta$$

المعادلات الوسيطية للمتدحرج هندسيا

أي المركز الآني للدوران هندسياً في الجملة المتماسكة هي $I(\ell, \ell.\cot\theta)$

5) لإيجاد تسارع النقطة (B) من العلاقة التالية :

$$\vec{\Gamma}(B) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{AB} - \omega^2\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{\Gamma}(B) = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \theta'' \\ 2\ell & 0 & 0 \end{vmatrix} - \theta'^2 2\ell.\vec{\imath}$$

$$\vec{\Gamma}(B) = -\theta'^2 2\ell.\vec{\imath} + 2\theta''\ell\vec{\jmath}$$

أو من الاشتقاق المباشر مرتين للعلاقة :

$$\overrightarrow{o_1B} = v.t\,\vec{\imath_1} + 2\ell.\cos\theta\,\vec{\imath_1} + 2\ell.\sin\theta\,\vec{\jmath_1}$$

6) إيجاد مركز التسارع المعدوم

إن النقطة A هي مركز التسارع المعدوم لأنها نقطة من المتماسكة ينعدم تسارعها بالنسبة للجملة الثابتة .

7) تعيين نقطة من القضيب ذات السرعة الصغرى في اللحظة المذكورة

$$\overrightarrow{Ic} = \frac{1}{\omega^2}.\vec{\omega} \wedge \vec{v}(c)$$

$$\vec{v}(\mathrm{c}) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{Ic}$$

إن السرعة الصغرى تقابل أقل بعد عن المركز الآني للدوران

إذا مركز القضيب c هي نقطة ذات سرعة أصغرية وهي أقل بعد عن المركز الآني للدوران I

ويكون $Ic \perp AB$.

مسألة من الكتاب صفحة (101) لم تحلها الدكتورة

ذراع (o_1A) طوله (a) يدور في مستوي ثابت بسرعة زاوية ثابتة (ω_1) حول النقطة الثابتة (o_1) ، إن (AB) ذراع طوله $(2a)$ مرتبط مفصليا في (A) (أي بالذراع o_1A) وتنزلق نهايته (B) على المستقيم الثابت (o_1x_1), والمطلوب :

1- معادلات حركة الذراع (AB).

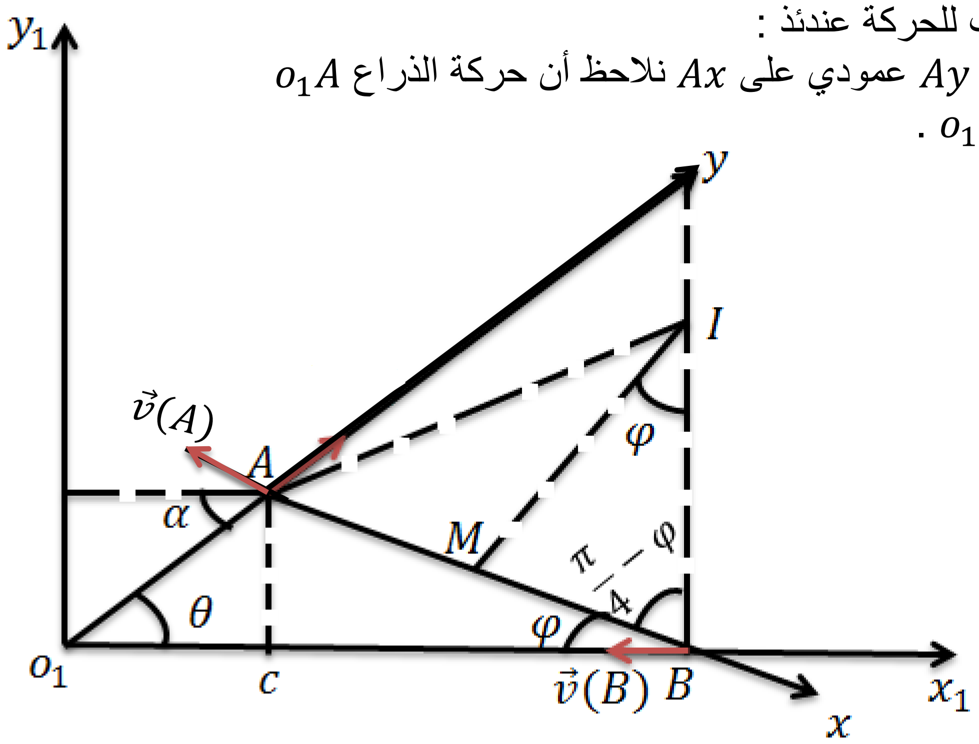
2- تعيين المركز الآني للدوران للذراع (AB) ثم تعيين القاعدة والمتدحرج .

3- تعيين سرعة وتسارع النقطة (B) .

الحل :

نختار النقطة (A) قطب للحركة عندئذ :

Ax هو الذراع AB و Ay عمودي على Ax نلاحظ أن حركة الذراع o_1A حركة دائرية مركزها o_1 .



1- تعيين معادلات الحركة :

النقطة o_1 , وبالتالي معادلات النقطة A في الجملة الثابتة هي :

$$A(x_A, y_A) = \begin{cases} x_A = a.\cos\theta \\ y_A = a.\sin\theta \end{cases}$$

ولكن حسب الفرض في نص المسألة $\theta' = \omega_1 \Rightarrow \theta = \omega_1.t + \theta_0$

من شروط البدء $t = 0$ و $\theta = 0$ نجد أن $\theta_0 = 0$ وبالتالي : $\theta = \omega_1 t$

وبالتالي فإن :

$$x_A = a.\cos\omega_1 t \quad , \quad y_A = a.\sin\omega_1 t$$

في المثلث ACo_1 يكون : $Ac = a.\sin\theta$ وفي المثلث ACB يكون : $Ac = 2a.\sin\varphi$

وبالتالي بالمطابقة :

$$a.\sin\theta = 2a.\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sin\theta}{2} \Rightarrow \varphi = arc\sin\left(\frac{\sin\theta}{2}\right) \quad ..(*)$$

$$\Rightarrow \varphi = arc\sin\left(\frac{\sin\omega_1 t}{2}\right)$$

وبالتالي معادلات الحركة هي :

$$x_A = a.\cos\omega_1 t \quad , y_A = a.\sin\omega_1 t \quad , \varphi = arc\sin\left(\frac{\sin\omega_1 t}{2}\right)$$

2- تعيين المركز الآني للدوران :

أولاً : بفرض إحداثيات المركز الآني للدوران في الجملة الثابتة هي $I(x_1, y_1)$

((سنقوم بتعيين المركز الآني هندسيا ويمكن تعينه تحليلياً))

A تتحرك بشكل دائرة و B تتحرك على نفس المستقيم .

وبالتالي نأخذ مماس الدائرة على A , ونأخذ العمود المماس في النقطة A, ألا وهي النظيم .

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}(A)}{\omega^2} \quad ; \omega = \varphi'$$

$$x_1 = \overrightarrow{o_1 B} = \overrightarrow{o_1 c} + \overrightarrow{cB}$$

نلاحظ أن : $o_1 c = a.\cos\theta$ كما أن : $cB = 2a.\cos\varphi \overset{(*)\text{ من}}{=} 2a.\sqrt{1 - \sin^2\varphi}$

$$\Rightarrow cB = 2a.\sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{4}} = a.\sqrt{4 - \sin^2\theta}$$

$$x_1 = a.\cos\theta + a.\sqrt{4 - \sin^2\theta} = a.\cos\omega_1 t + a\sqrt{4 - \sin^2\omega_1 t}$$

$$y_1 = BI = o_1 B.\tan\theta = x_1.\tan\theta$$

$$y_1 = \left(a.\cos\theta + a.\sqrt{4 - \sin^2\theta}\right).\tan\theta$$

$$y_1 = a.\sin\omega_1 t + a\sqrt{4 - \sin^2\omega_1 t}.\tan\omega_1 t$$

وبالتالي احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة الثابتة هي :

$$I\left(a.\cos\omega_1 t + a\sqrt{4-\sin^2\omega_1 t}\,,a.\sin\omega_1 t + a\sqrt{4-\sin^2\omega_1 t}\,.\tan\omega_1 t\right)$$

وهذه الاحداثيات تعين المعادلات الوسيطة للقاعدة .

لتعيين إحداثيات المركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة ، وبفرض احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة هي : $I\big(x(I),y(I)\big)$.

وبالتالي نقوم بما يلي :

$$x(I) = AM = AB - MB = 2a - IB.\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

$$x(I) = 2a - y_1.\sin\varphi = 2a - y_1.\frac{\sin\theta}{2}$$

$$x(I) = 2a - \left(a.\sin\theta + a\sqrt{4-\sin^2\theta}\,.\tan\theta\right).\frac{\sin\theta}{2}$$

$$x(I) = 2a - \frac{a}{2}\left(\sin^2\theta - \sqrt{4-\sin^2\theta}\,.\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$x(I) = 2a - \frac{a}{2}\left(\sin^2\omega_1 t - \sqrt{4-\sin^2\omega_1 t}\,.\frac{\sin^2\omega_1 t}{\cos\omega_1 t}\right)\quad ..(\#)$$

$$y(I) = IM = IB.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = y_1.\cos\varphi$$

$$y(I) = \left(a.\sin\theta + a\sqrt{4-\sin^2\theta}\,.\tan\theta\right)\frac{\sqrt{4-\sin^2\theta}}{2}$$

$$y(I) = \frac{a}{2}\left(\sin\theta\,.\sqrt{4-\sin^2\theta} + (4-\sin^2\theta).\tan\theta\right)$$

$$y(I) = \frac{a}{2}\left(\sin\omega_1 t\,.\sqrt{4-\sin^2\omega_1 t} + (4-\sin^2\omega_1 t).\tan\omega_1 t\right)..(\#\#)$$

إن $(\#)$ و $(\#\#)$ هي احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة

وهذه الاحداثيات تعين المعادلات الوسيطة للمتدحرج .

3- تعيين سرعة وتسارع النقطة (B) :

عبارة شعاع الموضع للنقطة (B) في الجملة الثابتة هو :

$$\overrightarrow{o_1B} = x_B\vec{\imath_1} + y_B\vec{\jmath_1} = x_1\vec{\imath_1}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{o_1B} = \left(a.\cos\omega_1 t + a\sqrt{4-\sin^2\omega_1 t}\right)\vec{\imath_1}$$

بالاشتقاق نحصل على السرعة :

$$\vec{V}(\mathrm{B}) = -a\left(\omega_1.\sin\omega_1 t + \frac{\omega_1.\sin\omega_1 t\,.\cos\omega_1 t}{\sqrt{4-\sin^2\omega_1 t}}\right)\vec{\imath_1}$$

بالاشتقاق مرة ثانية نحصل على التسارع :

$$\vec{\Gamma}(B) = -a\omega_1^2 . \cos\omega_1 t + a\frac{\left(-\omega_1^2\,(\cos^2\omega_1 t - \sin^2\omega_1 t).\sqrt{4-\sin^2\omega_1 t}\right)}{4-\sin^2\omega_1 t}$$

$$-a\left(\frac{\left(\frac{\omega_1 . \sin\omega_1 t\,.\cos\omega_1 t}{\sqrt{4-\sin^2\omega_1 t}}\right)(\omega_1 . \sin\omega_1 t . \cos\omega_1 t)}{4-\sin^2\omega_1 t}\right)$$

مسألة وظيفة من المحاضرة العاشرة

صفيحة دائرية مركزها (o) ثابت نصف قطرها (a) تستند بنقطة (A) من محيطها إلى مستوي ثابت (ox_1y_1) ، **والمطلوب :**

1) عين الإحداثيات المعممة للصفيحة , وشعاع الدوران الآني بدلالة هذه الإحداثيات ومشتقاتها بالنسبة للزمن .

2) بفرض أن نقطة التماس (A) تدور حول المحور (o_1z_1) بسرعة قيمتها $\vec{v}(\mathrm{A}) = \frac{\sqrt{3}}{2}t$ وقيمة شعاع الدوران $|\vec{\omega}| = 1$,عين معادلات حركة الصفيحة ثم عين سرعة نقطة ما من الصفيحة وتسارعها .

3) بفرض ان الصفيحة تتدحرج دون انزلاق على المستوي (ox_1y_1) ,عين المحور الآني للدوران والقاعدة والمتدحرج .

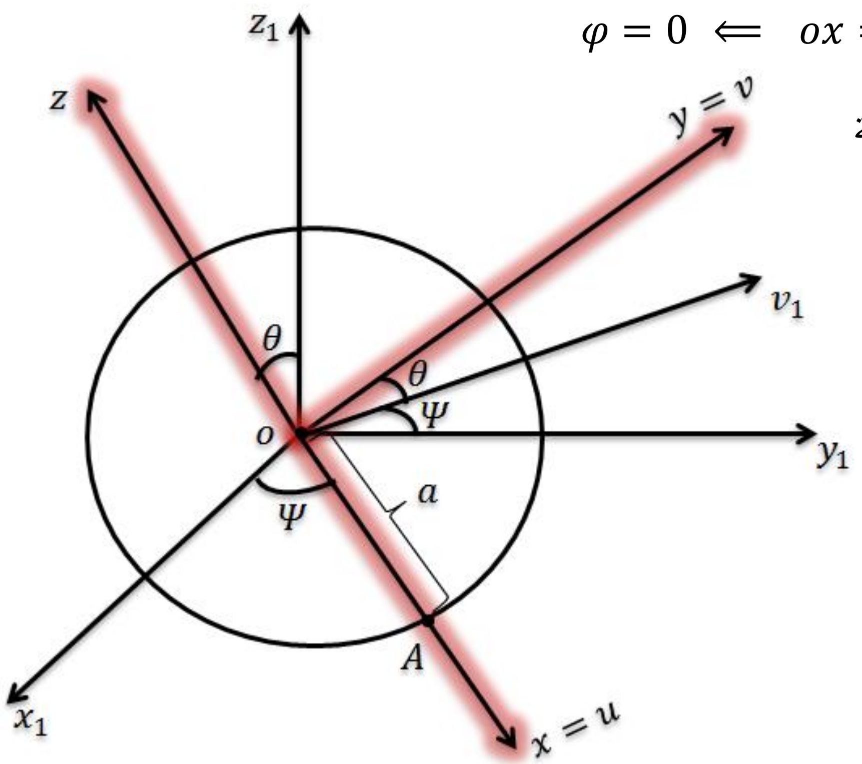
الحل :

oA ملازمة للمستوي x_1oy_1 ، لدينا ضلع من المتماسكة ملازم للمستوي الثابت

عندئذ يكون oA منطبق على $ox = ou \quad \Leftarrow \quad \varphi = 0$

وبالتالي وسطاء الحركة هي $\theta\,,\Psi$

وبالتالي أصبح لدينا درجتين من الحرية



نختار احداثيات $A(a,0,0)$

$$\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{k}$$
$$\Longrightarrow \vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\vec{u}$$

في جملة الثانية :

$$\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'(\cos\psi\,\overrightarrow{\imath_1} + \sin\psi\,\overrightarrow{\jmath_1})$$
$$\Longrightarrow \vec{\omega} = \theta'.\cos\psi\,\overrightarrow{\imath_1} + \theta'.\sin\psi\,\overrightarrow{\jmath_1} + \psi'\overrightarrow{k_1}$$
$$\Longrightarrow \vec{\omega}(\theta'.\cos\psi\,,\theta'.\sin\psi\,,\psi')$$

في جملة متماسكة :

$$\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\vec{u}$$
$$\overrightarrow{k_1} = \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{\jmath}\ ,\vec{u} = \vec{\imath}\ \ ,\vec{\jmath} = \vec{v}$$
$$\vec{\omega} = \theta'\vec{\imath} + \psi'.\sin\theta\,\vec{\jmath} + \psi'.\cos\theta\,\vec{k}$$
$$\Longrightarrow \vec{\omega}(\theta',\psi'.\sin\theta\,,\psi'.\cos\theta)$$

ايجاد معادلات الحركة : (ψ,θ)

لدينا : $\vec{v}(\mathrm{A}) = \frac{\sqrt{3}}{2}t$

$$\vec{v}(\mathrm{A}) = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oA} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \theta' & \psi'\sin\theta & \psi'\cos\theta \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\Longrightarrow \vec{v}(A) = a.\psi'.\cos\theta\,\vec{\jmath} + (-a.\psi'.\sin\theta)\vec{k}$$
$$\Longrightarrow \vec{v}(A) = a.\psi'\big(\cos\theta\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k}\big)$$

بتعويض قيمة السرعة مع التربيع :

$$\frac{3}{4}t^2 = a^2\psi'^2 \Longrightarrow \psi'^2 = \frac{3}{4}.\frac{t^2}{a^2} \Longrightarrow \psi' = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{t}{a}$$

بالمكاملة نجد :

$$\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{t^2}{a} + \psi_0$$

في بداية الحركة $t = 0$, $\psi = 0$ وبالتالي $\psi_0 = 0$

$$\Longrightarrow \psi = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{t^2}{a}$$

لدينا : $|\vec{\omega}| = 1$

$$\vec{\omega} = \theta'\vec{\imath} + \psi'.\sin\theta\,\vec{\jmath} + \psi'.\cos\theta\,\vec{k}$$
$$\xRightarrow{\text{بتربيع}} |\vec{\omega}|^2 = \theta'^2 + \psi'^2.\sin^2\theta + \psi'^2.\cos^2\theta$$
$$\Longrightarrow |\vec{\omega}|^2 = \theta'^2 + \psi'^2$$

$$\Rightarrow 1=\theta'^2+\left(\frac{3}{4}.\frac{t^2}{a^2}\right)\Rightarrow 1-\frac{3}{4}.\frac{t^2}{a^2}=\theta'^2$$

$$\Rightarrow \theta'=\sqrt{1-\frac{3}{4}.\frac{t^2}{a^2}}\Rightarrow \frac{d\theta}{dt}=\sqrt{1-\frac{3}{4}.\frac{t^2}{a^2}}\Rightarrow \theta=\int\sqrt{1-\frac{3}{4}.\frac{t^2}{a^2}}dt$$

نفرض $t=\frac{2}{\sqrt{3}}a.\cos u$ ومنه $dt=-\frac{2}{\sqrt{3}}a.\sin u\,du$

$$\Rightarrow \theta=-\frac{2}{\sqrt{3}}a.\int \sin u\,.\sqrt{1-\frac{3}{4}.\frac{4a^2}{3a^2}.\cos^2 u}\,du$$

$$\Rightarrow \theta=-\frac{2}{\sqrt{3}}a.\int \sin u\,.\sin u\,.du$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{2a}{\sqrt{3}}.\int -\sin^2 u\,.du \quad \Rightarrow \theta=\frac{2a}{\sqrt{3}}.\int\frac{(\cos 2u-1)}{2}.du$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{a}{\sqrt{3}}.\left[\frac{1}{2}.\sin 2u-u\right]\dots(*)$$

بتعويض $u=arc.\cos\frac{\sqrt{3}}{2a}t$ في $(*)$ نجد :

$$\theta=\frac{a}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}.\sin 2arc.\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2a}t\right)-arc.\cos\frac{\sqrt{3}}{2a}t\right]$$

في الجملة المتماسكة : لدينا : $\overrightarrow{oM}\parallel\vec{\omega}$ و بفرض $M(x,y,z)$

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}$$

$$\underbrace{\frac{x}{\theta'}}_{1}=\underbrace{\frac{y}{\psi'.\sin\theta}}_{2}=\underbrace{\frac{z}{\psi'.\cos\theta}}_{3}$$

من (1) و (2)

$$\theta'.y=x\psi'.\sin\theta$$

من (1) و (3)

$$\theta'.z=x\psi'.\cos\theta$$

بالتربيع والجمع نجد :

$$\theta'^2(y^2+z^2)=x^2\psi'^2$$

وبتعويض قيمة كل من ψ',θ' نجد :

$$1-\frac{3}{4}.\frac{t^2}{a^2}(y^2+z^2)=x^2.\frac{3}{4}.\frac{t^2}{a^2}$$

وهي معادلة المتدحرج .

في الجملة الثابتة : $\overrightarrow{o_1M} \parallel \vec{\omega}$

$$\frac{x_1}{p_1}=\frac{y_1}{q_1}=\frac{z_1}{r_1}$$

$$\underbrace{\frac{x_1}{\theta'.\cos\psi}}_{1}=\underbrace{\frac{y_1}{\theta'.\sin\psi}}_{2}=\underbrace{\frac{z_1}{\psi'}}_{3}$$

من (1) و (3)

$$\psi' x_1=z_1\theta'.\cos\psi$$

من (2) و (3)

$$\psi' y_1=z_1\theta'.\sin\psi$$

بالتربيع والجمع نجد :

$$\psi'(x_1^2+y_1^2)=z_1^2\theta'^2$$

وبتعويض قيمة θ',ψ' نجد :

$$\frac{3}{4}.\frac{t^2}{a^2}(x_1^2+y_1^2)=z_1^2\left(1-\frac{3}{4}.\frac{t^2}{a^2}\right)$$

وهي معادلة القاعدة .

إيجاد سرعة نقطة ما من الصفيحة ولتكن (A) بحيث $A(a,0,0)$

نوجد السرعة بجملة متماسكة :

$$\vec{v}(\mathrm{A})=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oA}\Longrightarrow\vec{v}(\mathrm{A})=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \theta' & \psi'\sin\theta & \psi'\cos\theta\\ a & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow\vec{v}(\mathrm{A})=a.\psi'.\cos\theta\,\vec{\jmath}+(-a.\psi'.\sin\theta)\vec{k}$$

$$\Longrightarrow\vec{v}(\mathrm{A})=(0,a.\psi'.\cos\theta\,,-a.\psi'.\sin\theta)$$

لإيجاد التسارع نستخدم العلاقة التالية :

$$\vec{\Gamma}(A)=\vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{oA}+\vec{\omega}\wedge\vec{v}(A)$$

لدينا شعاع الدوران

$$\vec{\omega}=(\theta',\psi'\sin\theta\,,\psi'\cos\theta)$$

نشتق السرعة الزاوية في المتماسكة :

$$\vec{\varepsilon}=(\theta'',\psi''.\sin\theta+\theta'\psi'.\cos\theta\,,\psi''.\cos\theta-\theta'\psi'.\sin\theta)$$

ومنه بتعويض كل من $\vec{\omega},\vec{\varepsilon},\vec{v}(A)$ بعلاقة التسارع للنقطة (A) نجد :

$$\vec{\Gamma}(A)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \theta'' & \psi''\sin\theta+\theta'\psi'.\cos\theta & \psi''\cos\theta-\theta'\psi'.\sin\theta\\ a & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \theta' & \psi'\sin\theta & \psi'\cos\theta\\ 0 & a\psi'.\cos\theta & -a\psi'\sin\theta\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(A)=a(\psi''\cos\theta-\theta'\psi'.\sin\theta)\vec{j}-a(\psi''\sin\theta+\theta'\psi'.\cos\theta)\vec{k}+$$

$$\left(-a\psi'^2\sin^2\theta-a\psi'^2\cos^2\theta\right)\vec{i}+(a\theta'\psi'\sin\theta)\vec{j}+(a\theta'\psi'\cos\theta)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(A)=-a\psi'^2\vec{i}+a\psi''\cos\theta\,\vec{j}-a\psi''\sin\theta\,\vec{k}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\Gamma}(A)=\left(-a\psi'^2,a\psi''\cos\theta\,,-a\psi''\sin\theta\right)}$$

إنتهت المحاضرة

وما كلّ مَن يهوَى يَعِفّ إذا خَلا.......
عَفَافي وَيُرْضي الحِبّ وَالخَيلُ تلتقي

إعداد: محمد علي فليون *** لمى حبشية