نظرية الاحتمالات

نظري

◀ دكتور المادة: علي القبوي

◀ المحاضرة الثامنة عشر   عنوان المحاضرة : الصفات العددية للمتغيرات والأشعة العشوائية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-التباين والانحراف المعياري وخواصهما .

2- التغاير وخواصه .

3- معامل الارتباط وخصائصه.

التباين والانحراف المعياري وخواصهما

تعريف ليكن Y متغيراً عشوائياً له عزماً من المرتبة الثانية (أي أنَّ : $E|Y|^2 < +\infty$)

فإننا نعرف تباين المتغير العشوائي Y بـ :

$$\sigma_Y^2 = Var(Y) = V(Y) = E\big(Y - E(Y)\big)^2$$

ومن أجل $E(Y) = \mu$, فإنّه : $V(Y) = E(Y - \mu)^2$

وهو العزم المركزي من المرتبة حول μ وهو يمثل متوسط مربعات انحراف القياسات عن متوسطها .

تعريف نعرف الانحراف المعياري لـ Y بأنَّه الجذر الموجب لتباين Y :

$$\sigma_Y := \sqrt{V(Y)}$$

الصيغة المختزلة للتباين

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = E(Y^2) - \mu^2$$

◀ **البرهان** من التعريف نكتب :

$$V(Y) = E(Y - \mu)^2 = E(Y^2 - 2\mu.Y + \mu^2) = E(Y^2) - 2\mu.E(Y) + \mu^2$$

$$\Rightarrow V(Y) = E(Y^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \Rightarrow V(Y) = E(Y^2) - \mu^2$$

μ^2 لا نأخذ له توقع لأنه ثابت .

◀**ملاحظة** التوقع والتباين والانحراف المعياري بمتغير عشوائي أو لدالة فيه هي مقادير ثابتة

$E(X) =$ ثابت ; $E\big(g(X)\big) =$ ثابت , التباين والانحراف المعياري مقادير موجبة .

خواص التباين

1) $V(C) = 0 \; ; \; \forall C \in \mathbb{R}$

الإثبات $V(C) = E(C^2) - \big(E(C)\big)^2 = C^2 - C^2 = 0$

2) $V(C.Y) = E(C.Y)^2 - \big(E(C.Y)\big)^2 = C^2.E(Y)^2 - \big(C.E(Y)\big)^2$

$$C^2\left[E(Y)^2 - \big(E(Y)\big)^2\right] = C^2.V(Y)$$

نتيجة $\sigma_{C.Y} = \sqrt{V(C.Y} = \sqrt{C^2.V(Y)} = |C|.\sqrt{V(Y)} = |C|\sigma_Y$

3) $V(aY + b) = a^2.V(Y) \; ; \; \forall a, b \in \mathbb{R}$

الإثبات $V(aY + b) = E(aY + b)^2 - \big(E(aY + b)\big)^2$

$$= E(a^2Y^2 + 2abY + b^2) - [a^2(E(Y))^2 + 2abE(Y) + b^2]$$

$$= a^2E(Y^2) + 2abE(Y) + b^2 - a^2\big(E(Y)\big)^2 + 2abE(Y) + b^2$$

$$\Rightarrow V(aY + b) = a^2E(Y^2) - a^2\big(E(Y)\big)^2 = a^2\left[E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2\right] = a^2V(Y)$$

4) $V(Y) \le E(Y - a)^2 \; ; \; \forall a \in \mathbb{R}$

الإثبات $(Y - a)^2 = (Y - E(Y) + E(Y) - a)^2$

$$= \big(Y - E(Y)\big)^2 + (E(Y) - a)^2 + 2\big(Y - E(Y)\big)(E(Y) - a)$$

$$\Rightarrow E(Y - a)^2 = E(Y - E)^2 + E(E(Y) - a)^2 + E(2(Y - E(Y).E(Y) - a)$$

حيث أنَّ :

$$E(2(Y-E(Y).(E(Y)-a)=2(E(Y)-a).\Big(E\big(Y-E(Y)\big)\Big)$$

$$=2(E(Y)-a).\Big(E(Y)-E\big(E(Y)\big)\Big)=\text{ثابت}.\big(E(Y)-E(Y)\big)=0$$

$$\Rightarrow E(Y-a)^2=V(Y)+E(E(Y)-a)^2\Rightarrow E(Y-a)^2\geq V(Y)$$

تعريف المتغير المعياري

ليكن X متغيراً عشوائياً توقعه μ , وتباينه $V(X)=\sigma^2$, عندئذٍ نسمّي المتغير التالي :

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

متغيراً عشوائياً معيارياً , ويكون توقعه صفراً $E(Z)=0$, وتباينه واحد $V(Z)=1$

◄ **البرهان** $$E(Z)=E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}.E(X-\mu)=\frac{1}{\sigma}.(\mu-\mu)=0$$

$$V(Z)=V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}.V(X-\mu)=\frac{1}{\sigma^2}.[V(X)-V(\mu)]=\frac{1}{\sigma^2}.[\sigma^2-0]=1$$

التغاير وخواصه

تعريف ليكن X و Y متغيرين عشوائيين لكلا منهما توقع منتهٍ , وللجداء $(X.Y)$ توقع منتهٍ , عندئذٍ :

نعرف التغاير بين X و Y بـ :

$$cov(X,Y)=E\big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\big]=\sigma_{X.Y}$$

الصيغة المختزلة لحساب التغاير

$$cov(X,Y)=E(X.Y)-E(X).E(Y)$$

◄ **البرهان** من التعريف لدينا : $$cov(X,Y)=E\big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\big]$$

$$=E[X.Y+E(X)E(Y)-Y.E(X)-X.E(Y)]$$

وحيث إنَّ التوقع الرياضي للمتغير مقدار ثابت

$$\Rightarrow cov(X,Y) = E(X.Y) + E(X).E(Y) - E(X).E(Y) - E(X).E(Y)$$

$$\Rightarrow cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

حيث $E(X.Y)$, يعطى (تعريفاً) بـ :

$$E(X.Y) = \begin{cases} \sum_x \sum_y x.y.f(x,y) \ ; \text{منقطع } (X,Y) \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x.y.f(x,y).dx.dy \ ; \text{مستمر } (X,Y) \end{cases}$$

◄ **نتيجة** إذا كان X و Y مستقلين عشوائياً فإنَّ : $cov(X,Y) = 0$

لأنَّ : $cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$

وبسبب الاستقلال $\Leftarrow$ $cov(X,Y) = E(X).E(Y) - E(X).E(Y) = 0$

♥ **ملاحظة** ورد إثبات هذه النتيجة في دورة سابقة ولكن مع إثبات استقلال X,Y , أي في حال ورد كسؤال امتحاني نثبت أولاً استقلال X,Y , ثمّ نثبت $cov(X,Y) = 0$.

مبرهنة

$$V(X \pm Y) = E(X \pm Y)^2 - \left(E(X \pm Y)\right)^2$$

الإثبات من التعريف لدينا :

$$V(X \pm Y) = E(X \pm Y)^2 - \left(E(X \pm Y)\right)^2$$

$$= E[X^2 + Y^2 \pm 2XY] - [(EX)^2 + (EY)^2 \pm 2EX.EY]$$

$$= EX^2 + EY^2 \pm 2EXY - (EX)^2 - (EY)^2 \pm 2EX.EY$$

$$= EX^2 - (EX)^2 + EY^2 - (EY)^2 \pm 2(E(X.Y) - EX.EY$$

$$= V(X) + V(Y) \pm 2cov(X,Y)$$

◄ **نتيجة هامة** إذا كان X,Y مستقلين عشوائياً فإنَّ :

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

البرهان

بما أنَّ X,Y مستقلين عشوائياً فإنَّ $cov(X,Y)=0$ وحسب المبرهنة السابقة فإنَّ :

$$V(X\pm Y)=V(X)+V(Y)$$

◄ **ملاحظة** $cov(X,X)=V(X)$

$$cov(X,X)=E(X.X)-E(X).E(X)=E(X^2)-E(X)^2=V(X)$$

♥ **نتيجة** $cov(a.X+b\,,c.Y+d)=a.c.cov(X,Y)$

البرهان (هام)

$$cov(a.X+b\,,c.Y+d)=E[(a.X+b)(c.Y+d)]-E(a.X+b).E(c.Y+d)$$

$$=E[ac.XY+cb.Y+ad.X+bd]-[a.c.E(X).E(Y)+ad.E(X)+bc.E(Y)+bd]$$

$$=ac.E(X.Y)+c.b.E(Y)+a.d.E(X)+bd-ac.E(X).E(Y)-ad.E(X)-bcE(Y)-bd$$

$$=ac.[E(X.Y)-E(X).E(Y)]=ac.cov(X,Y)$$

$$\Rightarrow cov(a.X+b\,,c.Y+d)=a.c.cov(X,Y)$$

معامل الارتباط وخصائصه

تعريف ليكن X,Y متغيرين عشوائيين لهما عزوم من المرتبة الثانية :

$$(E|Y|^2<v\,,E|X|^2<v)$$

نعرف معامل الارتباط بين المتغيرين X,Y بالعلاقة :

$$\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}.\sqrt{V(Y)}}=\frac{\sigma_{X.Y}}{\sigma_X.\sigma_Y}$$

♥ **نتيجة** إذا كان X و Y مستقلان عشوائياً فإنَّ : $\rho(X,Y)=0$

لأنَّ : $cov(X,Y)=0$

خواص معامل الارتباط

1) $\rho(X,X)=1$ ، لأنّ : $\rho(X,X)=\dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}.\sqrt{V(Y)}}=\dfrac{V(X)}{V(X)}=1$

2) $-1\le\rho(X,Y)\le+1$

البرهان باستخدام متراجحة شوارتز : $\left(E(X.Y)\right)^2\le E(X^2).E(Y^2)$

باستبدال X بـ $X-E(X)$, و Y بـ $Y-E(Y)$ في المتراجحة نجد أنَّ :

$$\left(E\left(X-E(X).\left(Y-E(Y)\right)\right)\right)^2\le E\left(X-E(X)\right)^2.E\left(Y-E(Y)\right)^2$$

$$\Rightarrow[cov(X,Y)]^2\le V(X).V(Y)\Rightarrow\frac{[cov(X,Y)]^2}{V(X).V(Y)}\le1$$

$$\Rightarrow\left[\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}.\sqrt{V(Y)}}\right]^2\le1\Rightarrow\left(\rho(X,Y)\right)^2\le1$$

$$\Rightarrow|\rho(X,Y)|\le1\Rightarrow-1\le\rho(X,Y)\le+1$$

$$\rho(a.X+b\,,c.Y+d)=\begin{cases}\rho(X,Y) & ;\ a.c>0\\ -\rho(X,Y) & ;\ a.c<0\end{cases}$$

البرهان بالتعريف لدينا : $\rho(a.X+b\,,c.Y+d)=\dfrac{cov(aX+b\ ,\ c.Y+d)}{\sqrt{V(a.X+b)}.\sqrt{V(c.Y+d)}}$

ومنه حسب خواص cov و ρ $=\dfrac{a.c.cov(X,Y)}{|a|.\sqrt{V(X)}.|c|\sqrt{V(Y)}}$

$$=\frac{a.c}{|a|.|c|}.\rho(X,Y)=\begin{cases}\rho(X,Y) & ;\ a.c>0\\ -\rho(X,Y) & ;\ a.c<0\end{cases}$$

نتيجة بدون برهان : الشرط الازم والكافي ليكون X و Y مرتبطين خطياً هو أنَّ يكون $\rho^2(X,Y)=1$

إنتهت المحاضرة

نعتذر عن بعض الأخطاء الواردة في المحاضرة السابعة عشر وهي :

الخطأ : $|Y|<+\infty\,,E|X|<+\infty$

الصواب : $E|Y|<+\infty\,,E|X|<+\infty$

إعداد: منى شغل**إيناس دليل**نور مهرة